

3. Funkcja kwadratowa

PRZECZYTAJ WIĘCEJ

- 1. Funkcje
- 2. Równania i nierówności

zob.

Vademecum, 1. s. 102-105, 2. s. 64-68

↑ odpowiedzi
- s. 147

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

- Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = x^2 + 4x - 5$ przez symetrię względem:
a) osi OX , b) osi OY , c) punktu $O(0,0)$, d) prostej $y = -5$.
- O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g ?
a) $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$ b) $g(x) = 2x^2 + 2x$ c) $g(x) = 2x^2 + 4x - 2$
- Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -x^2$ o wektor \vec{u} . Podaj wzór funkcji h , którą otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $-2\vec{u}$.
a) $g(x) = -(x+1)^2 - 6$ b) $g(x) = -x^2 - x$ c) $g(x) = -x^2 + 6x + 4$
- Wykres funkcji f przesunięto o wektor \vec{u} . Naszkicuj wykres otrzymanej funkcji i podaj jej wzór.
a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $\vec{u} = [1, 3]$ b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$, $\vec{u} = [-1, -2]$
- Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$.
- Dana jest funkcja $f(x) = mx^2 + (m-6)x + 8 - m$. Dla jakich wartości parametru m zbiór wartości tej funkcji jest równy $(-\infty; 18)$?
- Dla jakich wartości parametru m funkcja:
a) $f(x) = (3+m)x^2 - mx + m$ ma najmniejszą wartość równą -3 ,
b) $f(x) = (2-m)x^2 + mx + m - 4$ ma największą wartość równą 2 ?
- Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji f należy do podanego przedziału?
a) $f(x) = x^2 + x + m^2 - m + \frac{1}{4}$, $\langle 2; 6 \rangle$ b) $f(x) = (m-1)x^2 + 3mx + 4 + 2m$, $(-\infty; 0)$
- Ile rozwiązań ma równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, jeżeli $a \neq 0$ i $a - b + 2c = 0$?
- Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (4-2m)x + m + 10 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tych samych znaków?
- Dla jakich wartości parametru m równanie:
a) $(2-m)x^2 + (3-m)x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne,
b) $mx^2 + (2m+1)x + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

Zestaw B. Zadania zamknięte

↑ odpowiedzi
- s. 148

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)

Punkt $(\frac{1}{3}, 2)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + bx + c$$

Wynika stąd, że wyrażenie $8b - 6c$ przyjmuje wartość równą:

- A. -3 , B. -2 , C. 2 , D. 3 .

Zadanie 2. (1 pkt)

Suma kwadratów pierwiastków równania $\sqrt{6}x^2 - \sqrt{6} = 3x$ jest równa:

- A. $\frac{7}{2}$, B. $\frac{9}{2}$, C. $\frac{11}{2}$, D. $\frac{13}{2}$.

Zadanie 3. (1 pkt)

Jednym z rozwiązań równania $x^2 + x + c = 0$ jest liczba $\frac{2-\sqrt{5}}{4}$. Wynika stąd, że liczba c należy do przedziału:

- A. $\langle -1; -\frac{1}{2} \rangle$, B. $\langle -\frac{1}{2}; 0 \rangle$, C. $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$, D. $\langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$.

Zadanie 4. (1 pkt)

Jeden z pierwiastków trójmianu kwadratowego $y = 4x^2 + bx - 7$ jest o 4 większy od drugiego. Oś symetrii paraboli będącej wykresem tego trójmianu może być dana równaniem:

- A. $x = \frac{3}{2}$, B. $x = \frac{5}{2}$, C. $x = \frac{7}{2}$, D. $x = \frac{9}{2}$.

Zadanie 5. (1 pkt)

Parabole dane równaniami $y = -x^2 - 4x + 3$ i $y = x^2 + 2x - 5$ przecinają się w punktach (x_1, y_1) i (x_2, y_2) . Iloczyn $x_1x_2y_1y_2$ jest równy:

- A. 12 , B. 16 , C. 18 , D. 24 .

Zadanie 6. (1 pkt)

Suma odwrotności pierwiastków równania $\frac{2}{13}x^2 - 2\frac{3}{4}x + 2\frac{4}{5} = 0$ jest równa:

- A. $\frac{25}{26}$, B. $\frac{35}{36}$, C. $\frac{45}{46}$, D. $\frac{55}{56}$.

Zadanie 7. (1 pkt)

Suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + 3x - 3 = 0$ jest liczbą podzieloną przez:

- A. 4 , B. 5 , C. 6 , D. 7 .

Zadanie 8. (1 pkt)

Do paraboli, do której należą punkty $A(-2, -3)$ i $B(4, 1)$, nie może należeć punkt:

- A. $(-4, 10)$, B. $(-1, -3)$, C. $(9, 10)$, D. $(10, 5)$.

Zestaw C. Zadania z kodowaną odpowiedzią

odpowiedzi
- s. 148

Zakoduj wynik w kratkach umieszczonych obok polecenia.

Zadanie 1. (2 pkt)

Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ o wektor $[\frac{17}{4}, \frac{17}{4}]$. Parabola będąca wykresem funkcji g ma wierzchołek w punkcie (p, q) . Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $|pq|$.

--	--	--

Zadanie 2. (2 pkt)

Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 , które są liczbami odwrotnymi takimi, że $x_1 < x_2$ oraz $x_1 + x_2 = 4$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_1 .

--	--	--

Zadanie 3. (2 pkt)

Oblicz wartość parametru k , dla którego zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3x + k - 3$ jest przedział $(-2; \infty)$. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby k .

--	--	--

Zadanie 4. (2 pkt)

Liczba $\frac{18-\sqrt{7}}{2}$ jest jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(4, 6)$. Liczba x_2 jest drugim miejscem zerowym tej funkcji. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_2 .

--	--	--

Zadanie 5. (2 pkt)

Liczba p jest równa kwadratowi różnicy pierwiastków równania $x^2 + 4x - \frac{1}{4} = 0$. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby p .

--	--	--

Zadanie 6. (2 pkt) CKE

Równanie $x^2 + 48x + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2 . Liczba $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

--	--	--

Zadanie 7. (2 pkt)

X jest zbiorem całkowitych wartości parametru m , dla których równanie $|-x^2 + 2|x| + 5| = m$ ma cztery rozwiązania. Oblicz sumę sześciątów liczb należących do zbioru X . Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

--	--	--

Zestaw D. Zadania otwarte

← odpowiedzi
- s. 148
modele
- s. 149

Zadanie 1. (4 pkt)

Rozwiąż nierówność $|x^2 - x| - |x - 5| \leq 3$.

Zadanie 2. (2 pkt) CKE 2015

Liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f . Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

Zadanie 3. (5 pkt)

Naszkiuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^3 + 9x^2} - 3x$. Rozwiąż nierówność $f(x) > 0$.

Zadanie 4. (3 pkt)

Zbadaj liczbę pierwiastków równania $x^2 + 2x + |x^2 + 2x| = m$ w zależności od wartości parametru m .

Zadanie 5. (4 pkt)

Naszkiuj wykres funkcji $f(x) = |(x - p)^2 + 2p|$ dla $p = -2$. Dla jakich wartości parametru p równanie $f(x) = 6$ ma dokładnie trzy rozwiązania?

Zadanie 6. (3 pkt) CKE

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność:

$$20x^2 - 24mx + 18m^2 \geq 4x + 12m - 5$$

Zadanie 7. (5 pkt) CKE

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(1 - m)x + 2$$

przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

Zadanie 8. (4 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{(m - 2)x^2 + (m - 2)x + 1}$. Dla jakich wartości parametru m jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych?

Zadanie 9. (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (3 - m)x^2 + mx - m$ przyjmuje wartości ujemne dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Zadanie 10. (5 pkt)

Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m - 4)x - 4m = 0$ jest cztery razy większa od sumy tych pierwiastków?

Zadanie 11. (5 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m + 2)x + \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których iloczyn i suma są liczbami przeciwnymi?

Zadanie 12. (3 pkt)

Zapisz wzór funkcji f , która każdej liczbie $n \in \mathbf{N}_+$ przyporządkowuje największą liczbę całkowitą x spełniającą nierówność $x^2 - 2nx - 8n^2 < 0$.

Zadanie 13. (3 pkt)

Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji $f(n) = x_1 + x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $nx^2 - (n+2)x + n+2 = 0$.

Zadanie 14. (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi – cosinusem tego samego kąta?

Zadanie 15. (5 pkt) CKE

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

Zadanie 16. (5 pkt) CKE 2015

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.

Zadanie 17. (6 pkt)

Dla jakich wartości parametru m jedno z rozwiązań równania $\frac{16}{m^2}x^2 - 6mx + m^2 = 0$ jest sześcianem drugiego rozwiązania? Znajdź te rozwiązania.

Zadanie 18. (5 pkt)

Wyznacz wartości parametru m , dla których zbiorem wartości funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{4}mx^2 + (m-1)x - m^2 + m + 1$$

jest przedział $\langle 1; \infty \rangle$.

Zadanie 19. (6 pkt)

Dla jakich wartości parametru m trójmian kwadratowy $y = (m+1)x^2 + 2x - 4m + 1$ ma przynajmniej jeden pierwiastek dodatni?

Zadanie 20. (7 pkt)

Dla jakich wartości parametru m pierwiastkami równania $x^2 - 2mx - m^2 - 2m + 4 = 0$ są dwie różne liczby ujemne x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$?

Zadanie 21. (6 pkt) CKE

Dane jest równanie $(x+3)[x^2 + (p+4)x + (p+1)^2] = 0$ z niewiadomą x .

a) Rozwiąż to równanie dla $p = 1$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których równanie to ma tylko jedno rozwiązanie.