

*1.6. Kombinatoryka – zadania

Przyjmujemy, że kolor w kartach składa się z asa, 3 figur (króla, damy i waleta) i 9 blotek (kart o numerach od 2 do 10).

Zestaw I

1. W klasie liczącej 12 dziewcząt i 8 chłopców wybierany jest samorząd składający się z przewodniczącego, dwóch zastępców i sekretarza, przy czym jedna osoba może pełnić tylko jedną funkcję. Oblicz, na ile sposobów można dokonać takiego wyboru, jeśli:
 - a) każdy uczeń może pełnić każdą z funkcji,
 - b) zastępców wybiera się spośród chłopców,
 - c) zastępców i sekretarza wybiera się spośród dziewcząt.
2. Trener wystawia sztafetę 4×100 m, mając do dyspozycji 8 sprinterów.
 - a) Ile jest wszystkich możliwych ustawień składów sztafety?
 - b) Ile jest wszystkich możliwych ustawień składów sztafety, jeśli jest ustalone, kto biegnie na pierwszej zmianie?
3. Z talii 52 kart wybieramy 13 kart. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wśród wybranych kart:
 - a) nie było pików,
 - b) było 7 kierów i 6 trefli,
 - c) było 5 pików, 4 trefle, 3 kara i 1 kier,
 - d) były as, każda z figur i każda z blotek.
4. Z talii 52 kart wybieramy 5 kart. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wśród wybranych kart:
 - a) były dokładnie 3 karty jednego koloru,
 - b) była co najmniej 1 figura.
5. Wśród 50 losów loterii fantowej jest 10 losów wygrywających. Oblicz, na ile sposobów można wybrać 4 losy tak, aby:
 - a) tylko 1 był wygrywający,
 - b) co najmniej 1 był wygrywający.
6. Z liter: P, R, S, T, W oraz cyfr: 1, 3, 5, 7, 9 tworzymy kody zawierające na początku pewną liczbę liter, a po nich trzy cyfry. Litery i cyfry mogą się powtarzać. Przy jakiej minimalnej liczbie liter wszystkich możliwych kodów będzie więcej niż $7 \cdot 10^4$?
7. Ile jest liczb 9-cyfrowych, w których zapisie występują dokładnie 3 trójki i 4 czwórki, a nie występuje zero? Ile jest takich liczb 10-cyfrowych?

8. Ile jest wszystkich liczb zapisanych za pomocą cyfr: 1, 2, 3, 4, które są:
- 8-cyfrowe, przy czym każda cyfra występuje dokładnie dwa razy,
 - 20-cyfrowe, przy czym każda cyfra występuje dokładnie pięć razy?
9. W rzędzie liczącym 8 miejsc siada 3 dziewcząt i 5 chłopców. Ustal, na ile sposobów mogą zająć miejsca, jeśli:
- dziewczęta siedzą razem i chłopcy razem,
 - dziewczęta siedzą razem.

Test jednokrotnego wyboru

10. Na ile sposobów można rozdzielić 6 różnych ciastek pomiędzy 3 osoby tak, aby każda z nich otrzymała 2 ciastka?
- A. 20 B. 90 C. 216 D. 729
11. Z talii 24 kart wybieramy 3 karty. Na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wśród wybranych kart były i czerwone, i czarne?
- A. $\binom{12}{3}\binom{12}{3}$ B. $\binom{24}{3} - 2 \cdot \binom{12}{3}$ C. $2 \cdot \binom{12}{3}$ D. $12 \cdot (2^3 - 2)$
12. Na ile sposobów można rozlokować 10 osób w pięciu ponumerowanych pokojach 1-osobowych i jednym pokoju 5-osobowym?
- A. $\binom{10}{5}$ B. $\binom{10}{5} \cdot 5!$ C. 10^5 D. 5^{10}
13. Kamienie domina mają kształt prostokątnych płytek podzielonych na dwa pola. W klasycznym wariacie gry na polu może być od 0 do 6 oczek, co daje 28 różnych kamieni. Istnieje wersja domina, którą rozgrywa się 91 kamieniami. Jaka jest wówczas maksymalna suma oczek na kamieniu?
- A. 13 B. 22 C. 24 D. 26

Zestaw II

14. Ile różnych słów można utworzyć, przestawiając litery w słowie:
- PIPI,
 - RAFA,
 - MATEMATYKA?
15. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie jedna cyfra występuje dokładnie dwa razy?

16. Z talii 52 kart wybieramy 13 kart. Na ile sposobów można wybrać karty dokładnie dwóch kolorów?
17. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek, a cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności? Ile jest takich liczb trzycyfrowych?
18. W hostelu jest pięć pokoi o numerach od 1 do 5. Numer pokoju informuje o liczbie miejsc noclegowych w danym pokoju. Na ile sposobów można rozlokować w tych pokojach 15 osób?
19. Ustal, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie:
- a) występują dokładnie dwie cyfry, b) występują tylko cyfry 5, 7, 9.
20. a) Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i są co najmniej cztery cyfry nieparzyste?
b) Ile jest liczb siedmiocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, a suma cyfr jest parzysta?
21. W zapisie pewnej liczby występują wszystkie cyfry oprócz zera, przy czym cyfra n występuje dokładnie n razy, gdzie $n \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Z ilu cyfr składa się ta liczba? Ile jest takich liczb?

1.7. Zdarzenia losowe

Zestaw I

1. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką. Jako zdarzenie elementarne przyjmujemy parę (k, l) , gdzie k oznacza liczbę oczek w pierwszym rzucie, a l – liczbę oczek w drugim rzucie. Poniżej podano przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.

$$\Omega = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$$

Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – suma oczek jest większa od 10,

B – iloczyn oczek jest liczbą pierwszą,

C – w drugim rzucie liczba oczek jest o 2 większa niż w pierwszym,

D – otrzymane liczby oczek są podzielne przez 2 lub 3.