EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI

Arkusz próbny nr 1
POZIOM ROZSZERZONY

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–18).
2. Rozwiązania zadań wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Czas pracy: 180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

Zadanie 1. (0–1)

Odległość pomiędzy prostymi równoległymi k: $3x + 4y + 112 = 0$ oraz l: $3x + 4y - 108 = 0$ jest równa:

A. 38 B. 44 C. 64 D. 220

Zadanie 2. (0–1)

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$ cm i $|\sphericalangle ACB| = 150°$. Promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy:

A. 8 cm B. 6 cm C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm D. 4 cm

Zadanie 3. (0–1)

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3 + \sin^4 x - \cos^4 x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest przedział:

A. $\langle 1, 5 \rangle$ B. $\langle 2, 4 \rangle$ C. $\langle 2, 3 \rangle$ D. $\langle 0, 3 \rangle$

Zadanie 4. (0–1)

Równanie $m^2(x + 1) - 4m + 4(1 - x) = 0$ jest sprzeczne dla pewnego parametru m. Wówczas m jest liczbą:

A. pierwszą B. złożoną C. ujemną D. podzielną przez 3

Zadanie 5. (0–1)

Wskaż zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} > 1$, gdzie $x \neq 0$.

A. $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(0, 2)$ D. $(2, +\infty)$

Zadanie 6. (0–2)

W trójkącie prostokątnym ABC o przyprostokątnych AB i AC mamy $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{5}$. Wysokość AD dzieli przeciwprostokątną BC na odcinki BD oraz DC. Oblicz $\frac{|BD|}{|DC|}$. Zakoduj otrzymany wynik, podając cyfrę jedności oraz dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 7. (0–2)

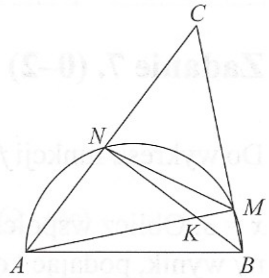
Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{(2x - 3)^2}$, gdzie $x \neq 1\frac{1}{2}$, poprowadzono styczną w punkcie o odciętej $x = 3$. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do tej stycznej. Zakoduj otrzymany wynik, podając kolejne trzy cyfry po przecinku przybliżenia dziesiętnego otrzymanej liczby z dokładnością do 0,001.

Zadanie 8. (0–2)

Wiadomo, że $\log_{xy} x = 2$, gdzie $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, $x \neq 1$, $y \neq 1$ i $xy \neq 1$. Oblicz $\log_{\frac{x}{y}} x$.

Zadanie 9. (0–2)

Dany jest trójkąt ABC. Okrąg, którego średnicą jest podstawa AB, przecina bok BC w punkcie M, zaś bok AC w punkcie N (zobacz rysunek obok). Przekątne czworokąta $ABMN$ przecinają się w punkcie K. Wykaż, że prosta CK jest prostopadła do odcinka AB.



Zadanie 10. (0–3)

Na czworokącie $ABCD$, w którym $|AB| = |BC| = 2$, $|CD| = \sqrt{3}$, $|AD| = \sqrt{5}$, opisano okrąg. Wiedząc, że miary kątów przy wierzchołkach A, B, C w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 11. (0–3)

Wyznacz wszystkie wartości x, dla których ciąg $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12},\ \frac{(x+3)\cdot\sqrt{2}}{4},\ \sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{144}\right)$ jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 12. (0–3)

Dane są funkcje f i g: $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{4}$ oraz $g(x)=2^{x-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $0{,}5\cdot g(2a)=[f(a)]^2+[g(a)]^2$.

Zadanie 13. (0–4)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem
$a_n = \dfrac{7 + \left(k^3 - 2k^2 + 6k\right)n}{n + 15}$, gdzie $n \in N_+$.

a) Wyznacz wartość parametru k, dla której granica ciągu (a_n) jest równa 12.

b) Wykaż, że dla wyznaczonej wartości k ciąg (a_n) jest rosnący.

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^3 2x + \ldots = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ w zbiorze $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, gdzie po lewej stronie równania występuje szereg geometryczny zbieżny.

Zadanie 15. (0–4)

W równoległoboku $ABCD$ kąt przy wierzchołku A jest ostry oraz $A(-6, -7)$, $B(4, -2)$. Obwód równoległoboku ma długość $18\sqrt{5}$. Z wierzchołka B tego równoległoboku poprowadzono prostą $l\colon y=-\frac{1}{2}x$ zawierającą wysokość równoległoboku poprowadzoną na bok AD. Oblicz długość przekątnej BD.

Zadanie 16. (0–4)

W I pudełku znajdują się 4 kule białe i 5 czarnych, natomiast w II pudełku jest 8 kul białych i 3 czarne. Z I pudełka losujemy jedną kulę i, nie oglądając jej, wkładamy ją do II pudełka. Następnie z II pudełka losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowane dwie kule są różnych kolorów.

Zadanie 17. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $mx^2 + 4 \cdot |x| + m - 3 = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

Zadanie 18. (0–7)

Rozważamy zbiór ostrosłupów prawidłowych czworokątnych o krawędzi bocznej długości 6. Wyznacz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, którego pole przekroju płaszczyzną, wyznaczoną przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa, jest największe. Oblicz największe pole przekroju.

BRUDNOPIS