ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA

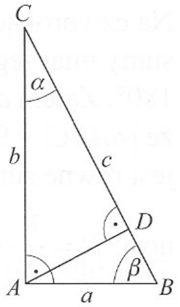
Odpowiedzi i rozwiązania do arkusza próbnego nr 1

Nr zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	B	A	B	C	C

Zadanie 6.

0	1	6

Rozwiązanie:



Niech $a = |AB|$, $b = |AC|$, $c = |BC|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle ACB|, \beta = |\sphericalangle ABC|$. Rozpatrujemy trójkąty prostokątne ADC i ABC: $\frac{|DC|}{b} = \cos\alpha = \frac{b}{c}$. Zatem $\frac{|DC|}{b} = \frac{b}{c}$, czyli $|DC| = \frac{b^2}{c}$. Podobnie w trójkątach ABD i ABC mamy: $\frac{|BD|}{a} = \cos\beta = \frac{a}{c}$, skąd $|BD| = \frac{a^2}{c}$. Otrzymujemy: $\frac{|BD|}{|DC|} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}16$.

Zadanie 7.

5	6	3

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \frac{2x^2+3}{4x^2-12x+9}$:

$$f'(x) = \frac{4x\cdot\left(4x^2-12x+9\right)-\left(2x^2+3\right)\cdot\left(8x-12\right)}{\left(2x-3\right)^4} = \frac{-24x^2+12x+36}{\left(2x-3\right)^4} = \frac{-12x-12}{\left(2x-3\right)^3},\ \text{gdzie}$$

$x \neq 1\frac{1}{2}$. Obliczamy współczynnik kierunkowy stycznej: $a_1 = f'(3) = -\frac{16}{9}$. Prosta prostopadła do stycznej ma współczynnik kierunkowy równy $a_2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$.

Zadanie 8. $\log_{\frac{x}{y}} x = \frac{2}{3}$

Rozwiązanie:

Ponieważ $\log_{xy} x = 2$, więc na podstawie definicji logarytmu otrzymujemy $x^2y^2 = x$, skąd $x = y^{-2}$. Niech $\log_{\frac{x}{y}} x = a$, wówczas $\left(\frac{x}{y}\right)^a = x$. Zatem $(y^{-3})^a = y^{-2}$, więc $a = \frac{2}{3}$.

Zadanie 9.

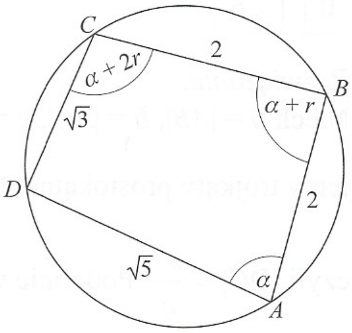
Rozwiązanie:

$|\sphericalangle ANB| = |\sphericalangle AMB| = 90°$ – kąty wpisane oparte na średnicy, więc BN oraz AM są wysokościami trójkąta ABC. Wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie zwanym ortocentrum trójkąta (punkt K). Zatem prosta CK zawiera wysokość trójkąta, poprowadzoną z punktu C na bok AB, więc jest prostopadła do odcinka AB.

Zadanie 10. $\frac{\sqrt{15}+4}{2}$

Rozwiązanie:

Niech $|\sphericalangle DAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \alpha + r$, $|\sphericalangle BCD| = \alpha + 2r$, gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego.



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°. Zatem $\alpha + \alpha + 2r = 180°$, skąd $\alpha + r = 90°$. Wynika stąd, że $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle ADC| = 90°$. Pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów prostokątnych ADC i ABC i wynosi: $P = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = \frac{\sqrt{15}+4}{2}$.

Zadanie 11. $x \in \{-15, 9\}$

Rozwiązanie:

Z własności ciągu geometrycznego mamy $\left[\frac{(x+3)\cdot\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \left(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{36} - 2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{144}\right)$.

Po prawej stronie równania korzystamy ze wzoru $(a + b)\cdot(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, gdzie $a = \sqrt[3]{6}$, $b = \sqrt[3]{12}$. Mamy: $\frac{(x+3)^2}{8} = 18$, czyli $(x + 3)^2 = 144$. Rozwiązaniami otrzymanego równania są liczby -15 oraz 9.

Zadanie 12.

Rozwiązanie:

Po zastosowaniu praw działań na potęgach wzór funkcji g zapisujemy w postaci

$g(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{4}$.

Przekształcamy prawą stronę tezy. Jeśli $a \in \mathbf{R}$, to: $[f(a)]^2 + [g(a)]^2 =$

$$= \left(\frac{2^a - 2^{-a}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2^a + 2^{-a}}{4}\right)^2 = \frac{2^{2a} - 2\cdot 2^a\cdot 2^{-a} + 2^{-2a}}{16} + \frac{2^{2a} + 2\cdot 2^a\cdot 2^{-a} + 2^{-2a}}{16} =$$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2a} + 2^{-2a}}{4} = 0{,}5\cdot g(2a)$, co kończy dowód.

Zadanie 13. a) $k = 2$

Rozwiązanie:

a) Obliczamy granicę ciągu (a_n):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7 + \left(k^3 - 2k^2 + 6k\right) \cdot n}{n + 15} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{n} + \left(k^3 - 2k^2 + 6k\right)}{1 + \frac{15}{n}} = k^3 - 2k^2 + 6k.$$

Z warunków zadania mamy $k^3 - 2k^2 + 6k = 12$, skąd $(k - 2) \cdot (k^2 + 6) = 0$, czyli $k = 2$.

b) Jeśli $k = 2$, to $a_n = \frac{7 + 12n}{n + 15}$. Badamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{12n + 19}{n + 16} - \frac{7 + 12n}{n + 15} = \frac{173}{(n + 15)(n + 16)}.$$

Ponieważ $a_{n+1} - a_n > 0$ dla dowolnej liczby $n \in N_+$, więc ciąg (a_n) jest rosnący.

Zadanie 14. $x \in \left\{-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right\}$

Rozwiązanie:

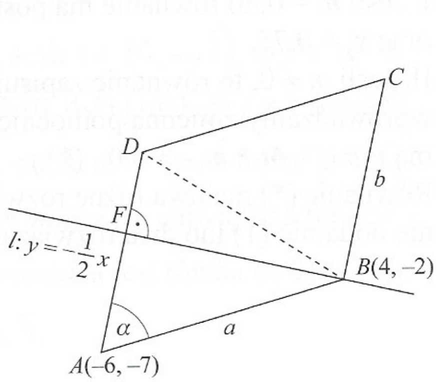
Szereg $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^3 2x + \ldots$ jest zbieżny tylko wtedy, gdy $|\operatorname{tg} 2x| < 1$. Wówczas jego suma jest równa $\frac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$. Przekształcamy równanie $\frac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ równoważnie:

$2\operatorname{tg} 2x = \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot (1 - \operatorname{tg} 2x)$, skąd $\left(3 + \sqrt{3}\right) \cdot \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} + 1$, czyli $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Stwierdzamy, że $\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right| < 1$. Znajdujemy rozwiązanie ogólne równania: $2x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in C$. Ponieważ z założenia $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, więc otrzymujemy: $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{12}$.

Zadanie 15. $|BD| = 3\sqrt{5}$

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia: $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ oraz $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Obliczamy długości boków równoległoboku:



$a = \sqrt{(4 + 6)^2 + (-2 + 7)^2} = 5\sqrt{5}$;

$b = \frac{18\sqrt{5} - 10\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$.

Wyznaczamy równanie prostej AD (jest to prosta prostopadła do prostej l, przechodząca przez punkt A).

pr. AD: $y = 2x + 5$

Wyznaczamy współrzędne punktu D. Punkt D jest punktem wspólnym prostej AD i okręgu o środku w punkcie A i promieniu $4\sqrt{5}$; niech $D(d_x, d_y)$.

$$\begin{cases} (d_x + 6)^2 + (d_y + 7)^2 = 80 \\ d_y = 2 \cdot d_x + 5 \end{cases}, \text{ skąd otrzymujemy } \begin{cases} d_x = -2 \\ d_y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} d_x = -10 \\ d_y = -15 \end{cases}$$

Mamy więc dwa rozwiązania, $D_1(-2, 1)$, $D_2(-10, -15)$. Sprawdzamy (korzystając np. z twierdzenia cosinusów), że kąt BAD_2 jest rozwarty, co jest sprzeczne z założeniem. Ostatecznie więc $D(-2, 1)$. Obliczamy $|BD|$, $|BD| = 3\sqrt{5}$.

Zadanie 16. $\frac{134}{297}$

Rozwiązanie:

Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrane dwie kule z II pudełka są różnych kolorów; B_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej z I pudełka, B_2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej z I pudełka. Mamy: $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $P(B_1) = \frac{4}{9}$, $P(B_2) = \frac{5}{9}$.

Ponadto $P(A \mid B_1) = \dfrac{\binom{9}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{9}{22}$ oraz $P(A \mid B_2) = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{16}{33}$. Korzystamy z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym i otrzymujemy: $P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{22} + \frac{5}{9} \cdot \frac{16}{33} = \frac{134}{297}$.

Zadanie 17. $m \in \langle 0; 3) \cup \{-1\}$

Rozwiązanie:

Rozważamy dwa przypadki.

I. Jeśli $m = 0$, to równanie ma postać: $4|x| = 3$, więc ma dwa różne rozwiązania: $x_1 = -0{,}75$ oraz $x_2 = 0{,}75$.

II. Jeśli $m \neq 0$, to równanie zapisujemy w postaci $m \cdot |x|^2 + 4 \cdot |x| + m - 3 = 0$ (*). Następnie wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = |x|$ i otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t: $mt^2 + 4t + m - 3 = 0$ (**).

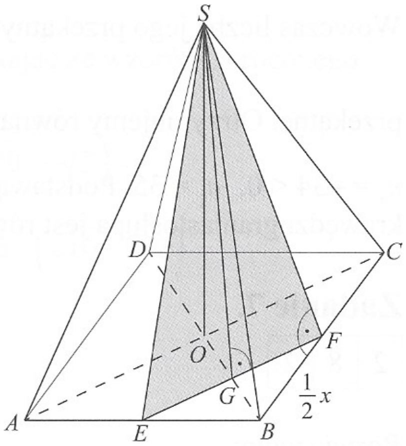
Równanie (*) ma dwa różne rozwiązania tylko wtedy, gdy równanie (**) ma jedno rozwiązanie dodatnie (1) lub dwa rozwiązania przeciwnych znaków (2). Zatem:

$$(1)\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta_t = 0 \\ t_0 > 0 \end{cases} \vee \ (2)\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta_t > 0 \\ t_1 \cdot t_2 < 0 \end{cases}, \text{ czyli} \begin{cases} m \neq 0 \\ -4\cdot(m-4)\cdot(m+1) = 0 \\ \dfrac{-2}{m} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m \neq 0 \\ -4\cdot(m-4)\cdot(m+1) > 0 \\ \dfrac{m-3}{m} < 0 \end{cases}$$

Pierwszy układ jest spełniony tylko przez liczbę $m = -1$. Zbiorem rozwiązań drugiego układu jest przedział $(0, 3)$. W przypadku II mamy $m \in (0, 3) \cup \{-1\}$.
Ostatecznie otrzymujemy $m \in \langle 0, 3) \cup \{-1\}$.

Zadanie 18. długość krawędzi podstawy $= 4\sqrt{3}$, pole przekroju $= 6\sqrt{3}$

Rozwiązanie:



Niech x oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego; $x > 0$. Przekrój jest trójkątem równoramiennym EFS. Pole przekroju jest równe $\frac{1}{2}\cdot|EF|\cdot|SG|$, gdzie $|EF| = \frac{1}{2}\cdot|AC| = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Wyznaczamy $|SG|$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych GFS i BFS: $|GF|^2 + |GS|^2 = |SF|^2$ oraz $|BF|^2 + |SF|^2 = |BS|^2$.

Ponieważ $|GF| = \frac{x\sqrt{2}}{4}$, $|BF| = \frac{1}{2}x$, $|BS| = 6$,

więc $\frac{1}{8}x^2 + |GS|^2 = 36 - \frac{1}{4}x^2$, skąd $|GS| = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{288 - 3x^2}$,

gdzie $x \in \left(0,\ 4\sqrt{6}\right)$ i $0 < \frac{x\sqrt{2}}{2} < 6$; ostatecznie $x \in \left(0, 6\sqrt{2}\right)$.

Wyznaczamy pole przekroju w zależności od x: $P(x) = \frac{1}{8}x\cdot\sqrt{288 - 3x^2}$, czyli

$P(x) = \frac{1}{8}\cdot\sqrt{-3x^4 + 288x^2}$, gdzie $x \in \left(0, 6\sqrt{2}\right)$. Rozważamy funkcję $f(x) = -3x^4 + 288x^2$, gdzie $x \in \left(0, 6\sqrt{2}\right)$. Pole przekroju jest największe wtedy, gdy funkcja f przyjmuje największą wartość w zbiorze $\left(0, 6\sqrt{2}\right)$. Obliczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = -12x^3 + 576x$, $x \in (0, 6\sqrt{2})$. Mamy: $\left[f'(x) = 0 \wedge x \in \left(0, 6\sqrt{2}\right)\right] \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$. Jeśli $x \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$, to $f'(x) > 0$; jeśli $x \in \left(4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}\right)$, to $f'(x) < 0$. To znaczy, że w przedziale $\left(0, 4\sqrt{3}\right)$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\left(4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}\right)$ funkcja f jest malejąca. Zatem w punkcie $x = 4\sqrt{3}$ funkcja f ma maksimum lokalne, $f_{max}\left(4\sqrt{3}\right) = 6912$, które jest jednocześnie wartością największą funkcji f w przedziale $\left(0, 6\sqrt{2}\right)$. Jeśli długość krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $4\sqrt{3}$, to pole przekroju jest największe i wynosi $P\left(4\sqrt{3}\right) = \frac{1}{8}\cdot\sqrt{6912} = 6\sqrt{3}$.