EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI

Arkusz próbny nr 2
POZIOM ROZSZERZONY

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–17).
2. Rozwiązania zadań wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Czas pracy: 180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

Zadanie 1. (0–1)

Funkcja homograficzna określona wzorem $f(x) = \frac{x-a}{x+2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ i $a \neq -2$, jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -2)$ oraz $(-2, +\infty)$. Zatem parametr a może mieć wartość:

A. 4
B. 2
C. –1
D. –3

Zadanie 2. (0–1)

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{0{,}5^x - 8}}$ jest przedział:

A. $(-\infty, -3)$
B. $(-\infty, -3\rangle$
C. $(-3, +\infty)$
D. $\langle -3, +\infty)$

Zadanie 3. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 4}{4x - x^3}$ jest równa:

A. $+\infty$
B. $-\infty$
C. 0
D. –4

Zadanie 4. (0–1)

Wiadomo, że A, B oznaczają zdarzenia losowe zawarte w przestrzeni Ω pewnego doświadczenia losowego. Jeśli $P(A' \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(B) = \frac{7}{12}$, to prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$ jest równe:

A. $\frac{2}{7}$
B. $\frac{3}{7}$
C. $\frac{4}{7}$
D. $\frac{5}{7}$

Zadanie 5. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{2n-3}{4+n}$ dla $n \in N_+$. Liczba g jest granicą ciągu (a_n). Warunku $|a_n - g| < 0{,}02$ <u>nie spełnia</u> k wyrazów tego ciągu. Wobec tego:

A. $k < 300$
B. $400 < k < 500$
C. $500 < k < 600$
D. $k > 600$

Zadanie 6. (0–2)

Liczba wszystkich przekątnych podstaw i ścian bocznych pewnego graniastosłupa jest równa 1190. Oblicz, ile krawędzi ma ten graniastosłup. Zakoduj otrzymany wynik, podając cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 7. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ i $|AC| = 3$. Oblicz długość środkowej poprowadzonej na bok BC. Zakoduj długość tej środkowej, podając cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (0–2)

Iloczyn siedmiu kolejnych początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego wynosi $\frac{128}{2187}$. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu. Zakoduj trzy kolejne cyfry po przecinku przybliżenia dziesiętnego z dokładnością do 0,001 otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. (0–3)

Oblicz sumę dwustu pięćdziesięciu sześciu wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem

$$a_n = \frac{\binom{2n}{2n-2}}{1+5+9+\ldots+(4n-3)},\ \text{jeśli } n \in N_+.$$

Zadanie 10. (0–3)

Wykaż, że wartość wyrażenia $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 11. (0–3)

Dla jakich wartości parametru k reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = -x^3 - 2x + 11$ przez dwumian $(x - k)$ należy do przedziału $(-1, +\infty)$?

Zadanie 12. (0–4)

Przez krawędź podstawy prawidłowego ostrosłupa trójkątnego poprowadzono płaszczyznę, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Każda krawędź boczna ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt β taki, że $4\sin\beta = 3\sin(\alpha + \beta)$. Oblicz stosunek pola powierzchni przekroju wyznaczonego przez tę płaszczyznę do pola podstawy ostrosłupa.

Zadanie 13. (0–4)

Doświadczenie polega na sześciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie cztery razy ściankę z pięcioma oczkami i jednocześnie iloczyn liczby oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie liczbą parzystą.

Zadanie 14. (0–5)

Dla jakich wartości parametru m, gdzie $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, prosta k o równaniu $y = -x + 0{,}5$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \log_{24\sqrt{3}}\left(m^2 - 4m\right)$?

Zadanie 15. (0–5)

Wykaż, że jeśli stosunek promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\sqrt{2} - 1$, to trójkąt ten jest równoramienny.

Zadanie 16. (0–5)

Dany jest okrąg o: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ o środku w punkcie S. Oblicz odległość punktu S od cięciwy okręgu wyznaczonej przez punkty przecięcia okręgu z wykresem funkcji $f(x) = -|x + 6| + 2$, $x \in \mathbf{R}$.

Zadanie 17. (0–7)

Rozważamy funkcję $f(m) = x_1 \cdot x_2$, gdzie x_1 oraz x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $(m + 1)x^2 + mx + m^2 = 0$ z niewiadomą x, $x \in \boldsymbol{R}$. Wyznacz tę wartość parametru m, dla której funkcja f ma maksimum. Czy maksimum funkcji f jest jej największą wartością? Odpowiedź uzasadnij.