Odpowiedzi i rozwiązania do arkusza próbnego nr 2

Nr zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	D	A	A	C	C

Zadanie 6.

1	0	5

Rozwiązanie:
Niech n oznacza liczbę boków wielokąta będącego podstawą graniastosłupa, $n \in N$ i $n \geq 3$.
Wówczas liczba jego przekątnych wyraża się wzorem $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Każda ściana ma dwie przekątne. Otrzymujemy równanie $2 \cdot \frac{n \cdot (n-3)}{2} + 2n = 1190$, skąd $n^2 - n - 1190 = 0$;
$n_1 = -34 < 0$, $n_2 = 35$. Podstawą graniastosłupa jest trzydziestopięciokąt. Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa $3 \cdot 35$, czyli 105.

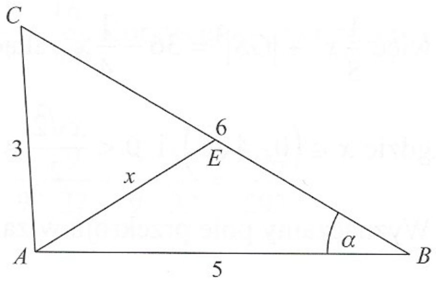
Zadanie 7.

2	8	2

Rozwiązanie:
Niech AE będzie środkową oraz $|AE| = x$, gdzie $x > 0$, $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC obliczamy $\cos\alpha$. Otrzymujemy

$3^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$, skąd $\cos\alpha = \frac{13}{15}$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABE, gdzie $|BE| = 3$, mamy

$x^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{13}{15}$, skąd $x = 2\sqrt{2}$.



Zadanie 8.

6	6	7

Rozwiązanie:
Niech a_1 – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q; $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$; I_7 – iloczyn siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu. Wówczas

$$I_7 = a_1 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot a_1q^4 \cdot a_1q^5 \cdot a_1q^6 = a_1^{\,7} \cdot q^{1+2+3+4+5+6} = a_1^{\,7} \cdot q^{21} = (a_1q^3)^7.$$

Ponieważ $I_7 = \frac{128}{2187}$, więc z równości $(a_1q^3)^7 = \frac{128}{2187}$ wynika, że $a_1q^3 = \frac{2}{3}$, czyli $a_4 = \frac{2}{3}$.

Zadanie 9. 256

Rozwiązanie:

Przekształcamy licznik ułamka w następujący sposób:

$\binom{2n}{2n-2} = \frac{(2n)!}{(2n-2)!\cdot 2!} = \frac{(2n-2)!\cdot(2n-1)\cdot 2n}{(2n-2)!\cdot 2} = (2n-1)\cdot n$. W mianowniku ułamka występuje suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 1$, $r = 4$. Zatem mianownik jest równy S_n, gdzie $S_n = \frac{1+(4n-3)}{2}\cdot n = (2n-1)\cdot n$. Ciąg (a_n) jest stały; $a_n = 1$ dla $n \in N_+$; zatem suma dwustu pięćdziesięciu wyrazów ciągu (a_n) jest równa 256.

Zadanie 10.

Rozwiązanie:

Przekształcamy dane wyrażenie w następujący sposób, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\left[\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\right]\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{12+4\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) = 10-2 = 8;\ 8 \in N.$$

Zadanie 11. $k \in (-\infty, 2)$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia o reszcie wynika, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-k)$ jest równa $W(k) = -k^3 - 2k + 11$. Otrzymujemy nierówność: $-k^3 - 2k + 11 > -1$, czyli $k^3 + 2k - 12 < 0$. Pierwiastkiem wielomianu $k^3 + 2k - 12$ jest liczba 2. Po podzieleniu $k^3 + 2k - 12$ przez $(k-2)$ otrzymujemy iloraz $k^2 + 2k + 6$. Daną nierówność możemy zapisać w postaci $(k-2)\cdot(k^2+2k+6) < 0$. Ponieważ dla dowolnej liczby $k \in \boldsymbol{R}$ wyrażenie $k^2 + 2k + 6$ jest dodatnie, więc $k - 2 < 0$, skąd $k \in (-\infty, 2)$.

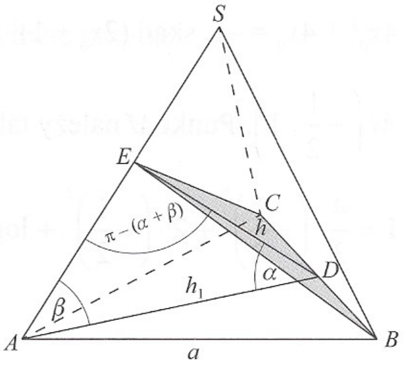
Zadanie 12. 0,75

Rozwiązanie:

Trójkąt ABC jest równoboczny o boku długości a,

$|AD| = h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $P_{BCE} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h$, gdzie

$h = |DE|$. Obliczamy $\frac{P_{BCE}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h}{\frac{1}{4}\cdot a^2\sqrt{3}} = \frac{2h}{a\sqrt{3}}$.



Z twierdzenia sinusów w trójkącie ADE mamy $\dfrac{h}{\sin\beta} = \dfrac{h_1}{\sin\left[\pi - (\alpha + \beta)\right]}$, skąd

$h = \dfrac{h_1 \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, więc $2h = \dfrac{a\sqrt{3}\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Zatem $\dfrac{P_{BCE}}{P_{ABC}} = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy: $\dfrac{P_{BCE}}{P_{ABC}} = \dfrac{3}{4}$.

Zadanie 13. $\frac{35}{5184}$

Rozwiązanie:

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie sześcioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 6^6$. Mamy model klasyczny; niech A – zdarzenie, że dokładnie w czterech rzutach otrzymamy pięć oczek i jednocześnie iloczyn liczby oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie liczbą parzystą. Obliczamy, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A:

- miejsca na „5” można wybrać na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów;
- iloczyn czterech piątek jest liczbą nieparzystą, zatem iloczyn dwóch pozostałych liczb oczek musi być liczbą parzystą. Oznacza to, że w dwóch pozostałych rzutach otrzymamy dwie ścianki z parzystą liczbą oczek – takich możliwości jest 9, albo jedną ściankę z parzystą liczbą oczek i jedną z nieparzystą liczbą oczek, różną od 5 – takich możliwości jest 12. Zatem mamy 21 możliwości uzyskania w dwóch rzutach iloczynu oczek będącego liczbą parzystą.

Otrzymujemy: $\overline{\overline{A}} = 15 \cdot 21 = 315$ oraz $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{315}{6^6} = \dfrac{35}{5184}$.

Zadanie 14. $m = -2$ lub $m = 6$

Rozwiązanie:

Współczynnik kierunkowy stycznej k jest równy -1. Z drugiej strony – współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f wynosi $f'(x_0)$, gdzie $M(x_0, y_0)$ – punkt styczności prostej k z wykresem funkcji f, zatem $f'(x_0) = -1$. Obliczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 4x^2 + 4x$, $x \in \mathbf{R}$. Następnie wyznaczamy współrzędne punktu M: $f'(x_0) = 4x_0^2 + 4x_0$ i $f'(x_0) = -1$, więc $4x_0^2 + 4x_0 = -1$, skąd $(2x_0 + 1)^2 = 0$, czyli $x_0 = -\dfrac{1}{2}$. Punkt M należy do prostej k, więc $y_0 = 1$; $M\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Punkt M należy także do wykresu funkcji f, zatem otrzymujemy równanie

$1 = \dfrac{4}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \log_{24\sqrt{3}}\left(m^2 - 4m\right)$, czyli $\log_{24\sqrt{3}}\left(m^2 - 4m\right) = \dfrac{2}{3}$, gdzie

$m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. Na podstawie definicji logarytmu mamy $m^2 - 4m = \left(24\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, skąd $m^2 - 4m - 12 = 0$. Otrzymujemy $m = -2$ lub $m = 6$.

Zadanie 15.

Rozwiązanie:

Założenie: Niech R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$; r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, $|AC| = b$, $|BC| = a$; $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $\alpha \in (0°, 90°)$, $\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$. Teza: $\alpha = 45°$.

Dowód:

(1) Ponieważ $|AB| = 2R$ oraz $|AB| = (a - r) + (b - r)$, więc $a + b = 2r + 2R$.

(2) Z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym mamy $\frac{a}{2R} = \sin\alpha$, $\frac{b}{2R} = \cos\alpha$, skąd $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\cos\alpha$.

Z (1) i (2) otrzymujemy zależność $2R\sin\alpha + 2R\cos\alpha = 2r + 2R$, skąd $2R(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = 2r$, czyli $\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \frac{r}{R}$. Ale z założenia $\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$, więc otrzymujemy równanie $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$. Korzystamy ze wzoru redukcyjnego oraz ze wzoru na różnicę cosinusów: $\cos(90° - \alpha) + \cos\alpha = \sqrt{2}$, skąd $2\cos 45° \cos(45° - \alpha) = \sqrt{2}$, czyli $\cos(45° - \alpha) = 1$. Ponieważ $\alpha \in (0°, 90°)$, więc jedynym rozwiązaniem równania jest $\alpha = 45°$, co kończy dowód.

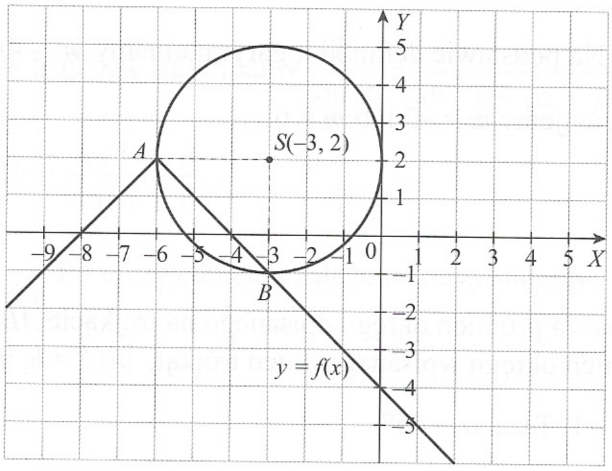
Zadanie 16. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych okręgu i wykresu funkcji f, rozwiążemy układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0 \\ y = -|x + 6| + 2 \end{cases}$ graficznie. Znajdujemy środek S i promień r okręgu o, sprowadzając równanie okręgu do postaci kanonicznej:

$(x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + 4 = 0$, czyli $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$; skąd $S(-3, 2)$, $r = 3$.

Wykres funkcji f powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = |x|$ w symetrii względem osi OX, a następnie przesunięcia otrzymanego wykresu równolegle o wektor $\vec{u} = [-6, 2]$. Szkicujemy w jednym układzie współrzędnych obydwie krzywe.



Odczytujemy współrzędne punktów przecięcia i sprawdzamy poprawność odczytu: współrzędne punktu $A(-6, 2)$ spełniają każde z równań układu:
$L_1 = (-6)^2 + 2^2 + 6 \cdot (-6) - 4 \cdot 2 + 4 = 36 + 4 - 36 - 4 = 0 = P_1$ oraz $L_2 = -|-6 + 6| + 2 = 0 + 2 = 2 = P_2$.
Podobnie współrzędne punktu $B(-3, -1)$:
$L_1 = (-3)^2 + (-1)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1) + 4 = 9 + 1 - 18 + 4 + 4 = 0 = P_1$ oraz
$L_2 = -|-3 + 6| + 2 = -3 + 2 = -1 = P_2$.
Następnie zauważamy, że promienie AS i BS są do siebie prostopadłe. Zatem trójkąt prostokątny ABS jest połową kwadratu o boku długości 3, odległość punktu S od cięciwy AB jest równa połowie długości przekątnej tego kwadratu, czyli $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Uwaga: Rozpatrywany układ równań można też rozwiązać algebraicznie.

Zadanie 17. Dla $m = -2$ funkcja f ma maksimum lokalne równe -4. Nie jest to największa wartość funkcji f. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

Rozwiązanie:
Równanie $(m + 1)x^2 + mx + m^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $m \neq -1$ i $\Delta > 0$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = m^2 - 4(m + 1)m^2 = -m^2 \cdot (4m + 3)$. Zatem $(m \neq -1 \wedge \Delta > 0) \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$. Korzystamy ze wzorów Viète'a i obliczamy iloczyn rozwiązań równania: $x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{m+1}$. Wzór funkcji f ma postać: $f(m) = \frac{m^2}{m+1}$, gdzie $D_f = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$. Obliczamy pochodną funkcji f:

$f'(m) = \frac{2m \cdot (m+1) - m^2 \cdot 1}{(m+1)^2} = \frac{m \cdot (m+2)}{(m+1)^2}$, $m \in D_f$. Jedynym miejscem zerowym pochodnej w zbiorze D_f jest liczba -2. Zauważamy, że jeśli $m \in (-\infty, -2)$, to $f'(m) > 0$, a jeśli $m \in (-2, -1) \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$, to $f'(m) < 0$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -2)$, zaś malejąca w każdym z przedziałów: (–2, –1) oraz $\left(-1,\ -\frac{3}{4}\right)$. Jeśli $m = -2$, to funkcja ma jedyne maksimum lokalne, $f_{max}(-2) = -4$. Badamy, czy –4 jest wartością największą funkcji f. W tym celu obliczamy granice funkcji f na krańcach przedziałów, w których jest ona określona:

$$\lim_{m\to-\infty}\frac{m^2}{m+1} = \lim_{m\to-\infty}\frac{m}{1+\frac{1}{m}} = -\infty \qquad \lim_{m\to-1^-}\frac{m^2}{m+1} = -\infty \qquad \lim_{m\to-1^+}\frac{m^2}{m+1} = +\infty \qquad \lim_{m\to-\frac{3}{4}}\frac{m^2}{m+1} = 2\frac{1}{4}$$

Na podstawie trzeciej granicy stwierdzamy, że funkcja f nie ma wartości największej; w szczególności maksimum lokalne nie jest wartością największą funkcji f.