Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi – s. 224
modele – s. 225

Zadanie 1. (7 pkt)
Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5 i 6 losujemy kolejno trzy cyfry, które zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Kiedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że będzie to liczba większa od 430, jest większe: w przypadku losowania ze zwracaniem czy losowania bez zwracania?

Zadanie 2. (6 pkt)
Na płaszczyźnie dane są dwie proste równoległe niepokrywające się. Na jednej z nich zaznaczono sześć punktów, a na drugiej – n punktów, gdzie $n \geqslant 2$. Oblicz n, jeśli prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane punkty spośród zaznaczonych są wierzchołkami trójkąta, jest równe $\frac{9}{14}$.

Zadanie 3. (7 pkt)
W urnie są dwie kule białe i sześć kul czarnych. Losujemy dwie kule bez zwracania. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne: wyciągnięcie kul o różnych kolorach czy wyciągnięcie kul tego samego koloru? Ile należy dołożyć kul białych, aby zdarzenia te były jednakowo prawdopodobne?

Zadanie 4. (5 pkt)
Mamy n kul o numerach od 1 do n oraz n szuflad o numerach od 1 do n. Do każdej szuflady wkładamy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula o numerze 1 nie trafi do szuflady o numerze 1. Dla jakich n to prawdopodobieństwo jest większe od 0,9?

Zadanie 5. (6 pkt)
Rzucamy siedem razy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) wypadną tylko parzyste liczby oczek,
b) pojawią się wszystkie liczby oczek.

Zadanie 6. (4 pkt)
Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 tworzymy liczby ośmiocyfrowe, w których cyfry się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby, w której wszystkie cyfry nieparzyste są na początku, a cyfra 1 jest bezpośrednio przed cyfrą 2.

Zadanie 7. (7 pkt)
Z grupy osób, w której jest 5 kobiet, wybrano trzyosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji jest więcej kobiet niż mężczyzn, wynosi $\frac{6}{7}$. Oblicz, ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Zadanie 8. (4 pkt)
Na dwóch ścianach sześciennej kostki są 2 oczka, na dwóch – 4 oczka, a na dwóch pozostałych – 6 oczek. Iloma co najmniej takimi kostkami trzeba rzucać, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej szóstki było większe od $\frac{3}{4}$?

Zadanie 9. (4 pkt)
Przy okrągłym stole usiadło 10 dziewcząt i 10 chłopców. Sprawdź, czy prawdopodobieństwo, że osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie, jest większe od 0,001.

Zadanie 10. (4 pkt)
Ze zbioru $1, 2, 3, \ldots, 50$ losujemy kolejno dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloraz pierwszej liczby przez drugą należy do przedziału $(1; 2\rangle$.

Zadanie 11. (6 pkt)
W partii 50 żarówek pewna ich liczba jest wadliwa. Z tej partii losowo wybiera się dwie żarówki. Jeżeli co najmniej jedna z nich jest uszkodzona, partię się odrzuca. Oblicz, ile co najwyżej może być wadliwych żarówek, aby prawdopodobieństwo odrzucenia partii było nie większe od 0,04.

Zadanie 12. (5 pkt) CKE 2015
Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę", pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę".

Zadanie 13. (5 pkt)
Oblicz $P(A' \cup B')$, jeśli $P(A \setminus B) = \frac{1}{4}$, $P(B \setminus A) = \frac{1}{3}$, a $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym.

Zadanie 14. (4 pkt)
Mając dane $P(A' \cap B') = 0{,}6$, oblicz:

a) $P(A \cup B)$,

b) $P(A)$ i $P(B)$, jeśli $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym, a $P(B) = 2P(A)$.

Zadanie 15. (2 pkt) CKE
Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.

Zadanie 16. (3 pkt) CKE
Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0{,}7$ oraz $P(B) = 0{,}8$, to $P(A|B) \geqslant 0{,}625$.

Zadanie 17. (4 pkt) CKE
Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 18. (4 pkt)
Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba naturalna n spełniająca nierówność $\binom{n}{n-3} \leqslant n$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = (x^4 - 16)(x^2 - 16)$?

13. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA. STATYSTYKA

Zadanie 19. (3 pkt) CKE
Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k dane jest wzorem $p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}$. Rozważamy dwa zdarzenia: zdarzenie A polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{1, 3, 5\}$, zdarzenie B polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$.

Zadanie 20. (4 pkt) CKE 2015
W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do drugiej urny i dodatkowo dokładamy do drugiej urny jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

Zadanie 21. (6 pkt)
Spośród liczb a, b, c, d wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie są liczbami całkowitymi, jeżeli:

$$a = \log_3\left(\log_2 \sqrt[3]{2}\right), \quad b = \log_3 \sqrt[3]{9} \cdot \log_2 \sqrt{8}, \quad c = \log_5 4 \cdot \log_2 5 + \log_2 3, \quad d = \frac{\log_3 7}{\log_9 7}$$

Zadanie 22. (7 pkt)
Z liczb $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 3)$ tworzymy trójwyrazowe ciągi, w których liczby mogą się powtarzać.

a) Wyznacz prawdopodobieństwo utworzenia ciągu monotonicznego.

b) Dla jakiego n prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{9}{16}$?

Zadanie 23. (3 pkt) CKE
Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3 \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Zadanie 24. (4 pkt) CKE
Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

Zadanie 25. (7 pkt) CKE
Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

Zadanie 26. (6 pkt) CKE
Oblicz, ile jest stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

Zadanie 27. (6 pkt) CKE
Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.