PLANIMETRIA

Zadanie 174.

Prosta styczna w punkcie P do okręgu o promieniu długości 2 i półprosta o początku w środku okręgu mająca z okręgiem punkt wspólny S przecinają się w punkcie A pod kątem o mierze 60°. Wyznacz długość promienia okręgu stycznego do odcinków AP, AS i krótszego łuku PS.

Zadanie 175.

Wewnątrz kąta o mierze 60° obrano punkt P. Odległości punktu P od ramion kąta są równe a i b. Oblicz odległość punktu P od wierzchołka kąta.

Zadanie 176.

Dany jest kąt wypukły o mierze 2α i wierzchołku w punkcie A oraz dwusieczna tego kąta. Zakreślono okrąg $o(O; R)$ taki, że $A \in o(O; R)$ i wyznaczający na ramionach kąta cięciwy o długościach a i b, zaś na dwusiecznej cięciwę o długości c. Wykaż, że $\frac{a+b}{c}$ jest wielkością stałą, niezależną od R i położenia okręgu.

Zadanie 177.

Przez punkty A i B, które są końcami średnicy pewnego okręgu, poprowadzono styczne a i b do tego okręgu. Następnie w dowolnym punkcie P tego okręgu, różnym od punktów A i B, poprowadzono prostą styczną przecinającą proste a i b odpowiednio w punktach C i D. Wykaż, że iloczyn $|CP| \cdot |PD|$ jest stały niezależnie od wyboru punktu P.

Zadanie 178.

Dwa boki trójkąta mają długości a i b. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta wiedząc, że miara kąta przeciwległego temu bokowi jest dwa razy większa od miary kąta przeciwległego bokowi długości b.

Zadanie 179.

Wykaż, że jeżeli długości boków trójkąta spełniają warunek $a^2 = b^2 + bc$, to w trójkącie tym α jest dwa razy większe od β. Liczby α i β są miarami dwóch kątów trójkąta.

Zadanie 180.

W trójkąt wpisano okrąg o promieniu długości r. Równolegle do boków trójkąta poprowadzono styczne do tego okręgu i w powstałe trójkąty wpisano okręgi o promieniach długości r_1, r_2 i r_3. Wykaż, że zachodzi następujący związek

$$r = r_1 + r_2 + r_3.$$

Zadanie 181.

Wykaż, że jeśli suma długości wysokości trójkąta jest 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego, to trójkąt ten jest równoboczny.

Zadanie 182.

Z wierzchołka C kąta prostego w trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CD. Udowodnij, że długość wysokości CD jest równa sumie długości promieni okręgów wpisanych w trójkąt ABC, trójkąt ADC i trójkąt DBC.

Zadanie 183.

Udowodnij, że każda prosta dzieląca dowolny trójkąt na dwie figury o równych polach i równych obwodach przechodzi przez środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 184.

Czy można zbudować trójkąt, którego długości boków są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi, a miara największego kąta wewnętrznego jest dwa razy większa od miary najmniejszego kąta wewnętrznego?

Zadanie 185.

Pole S trójkąta ABC spełnia równość $S = a^2 - (b - c)^2$, gdzie a, b i c są długościami boków trójkąta leżącymi naprzeciw kątów o miarach równych odpowiednio α, β i γ. Wyznacz $\sin\alpha$.

Zadanie 186.

Dany jest trójkąt o bokach długości 4, 6 i 8. Oblicz sumę kwadratów środkowych tego trójkąta.

Zadanie 187.

Oblicz długości a, b i c boków trójkąta, którego środkowe mają długości s_1, s_2 i s_3.

Zadanie 188.

Długości boków trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Jaki warunek spełnia stosunek długości najmniejszego z boków do różnicy ciągu, jeżeli trójkąt jest rozwartokątny?

Zadanie 189.

W trójkącie prostokątnym długości wysokości i środkowej poprowadzonych z wierzchołka kąta prostego oraz długość przeciwprostokątnej tworzą ciąg geometryczny. Iloczyn wyrazów tego ciągu jest równy 8. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 190.

Trójkąt równoboczny XYZ wpisany jest w okrąg. Punkt K należy do mniejszego z łuków XY. Udowodnij, że

$$|XK| + |YK| = |ZK|.$$

Zadanie 191.

Niech a, b i c oznaczają długości boków trójkąta. Wykaż, że w dowolnym trójkącie zachodzi zależność

$$\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{2} > \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Zadanie 192.

Niech S będzie polem trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość b i kąt przy wierzchołku ma miarę $\frac{1}{18}\pi$. Udowodnij, że

$$\left(\frac{4S}{b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{4S} = 3.$$

Zadanie 193.

Niech α, β i γ będą miarami kątów wewnętrznych trójkąta ABC. Udowodnij, że trójkąt ABC jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \sin\gamma.$$

Zadanie 194.

Wykaż, że jeżeli α, β i γ są miarami kątów dowolnego trójkąta, to prawdziwa jest równość

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Zadanie 195.

W trójkąt, którego długości boków są liczbami całkowitymi, wpisano okrąg o promieniu długości 1. Udowodnij, że boki trójkąta mają długości równe 3, 4 i 5.

Zadanie 196.

Dane są dwa okręgi o środku w punkcie S i promieniach długości R oraz r, gdzie $0 < r < R$. Na mniejszym okręgu opisano trójkąt, którego dwa wierzchołki należą do drugiego okręgu. Wykaż, że jeżeli trzeci wierzchołek tego trójkąta należy do wnętrza większego koła, to $\frac{R}{r} > 2$.

Zadanie 197.

W trójkącie ABC o bokach długości a, b i c poprowadzono dwusieczne kątów wewnętrznych tego trójkąta, które przecięły przeciwległe boki w punktach D, E i F.

a) Oblicz długości $|AD|$, $|BE|$ i $|CF|$.

b) Wykaż, że $|AD|^2 + |BE|^2 + |CF|^2 \le p^2$ i $h_a^{\,2} + h_b^{\,2} + h_c^{\,2} \le p^2$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$, zaś h_a, h_b i h_c oznaczają długości wysokości trójkąta poprowadzonych odpowiednio do boków o długości a, b i c.

Zadanie 198.

Udowodnij, że w każdym trójkącie ABC zachodzi zależność:

jeżeli $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 5\sin^2\gamma$, to $\sin\gamma \le \frac{3}{5}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$, $\beta = |\angle ABC|$ i $\gamma = |\angle ACB|$.

Zadanie 199.

Wykaż, że wyrażenie

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$

jest: >2, jeżeli trójkąt jest ostrokątny,
$=2$, jeżeli trójkąt jest prostokątny,
<2, jeżeli trójkąt jest rozwartokątny,

gdzie α, β i γ oznaczają miary kątów wewnętrznych trójkąta.

Zadanie 200.

Udowodnij, że jeżeli długości boków a, b i c pewnego trójkąta spełniają nierówność $a < \frac{b+c}{2}$, to miary kątów leżących naprzeciwko tych boków spełniają nierówność $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Zadanie 201.

W trójkącie ABC wybrano punkt A_1 na boku BC i punkt C_1 na boku AB tak, że $|A_1C| = \frac{1}{3}|BC|$ i $|C_1B| = \frac{1}{3}|AB|$. Proste AA_1 i CC_1 przecinają się w punkcie Q.

a) Przyjmując jako dane pole S trójkąta ABC, oblicz pola figur, na jakie został on podzielony.

b) W tym samym trójkącie ABC na boku AC obrano punkt B_1 taki, że $|B_1A| = \frac{1}{3}|AC|$.

Prosta BB_1 przecina proste AA_1 i CC_1 odpowiednio w punktach P i R. Wykaż, że pole trójkąta PQR jest równe $\frac{1}{7}S$.

Zadanie 202.

Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległościach 6 i 8 jednostek od końców dłuższego ramienia. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 203.

Trapez równoramienny o obwodzie 20, i przekątnej długości $\sqrt{41}$, jest opisany na okręgu. Oblicz odległości punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.

Zadanie 204.

Dane są pola P_1 i P_2 dwóch trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem punkt przecięcia przekątnych trapezu. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 205.

Nierównoległe boki trapezu przedłużono do wzajemnego przecięcia i przez otrzymany w ten sposób punkt poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu. Wyznacz długość odcinka tej prostej ograniczonego przez przedłużenia przekątnych trapezu, jeśli podstawy trapezu mają długości a i b.

Zadanie 206.

W trapezie $ABCD$ poprowadzono prostą równoległą do podstaw, przechodzącą przez punkt przecięcia się przekątnych i przecinającą boki nierównoległe trapezu w punktach E i F. Wykaż, że

$$|EF| = \frac{2ab}{a+b},$$

gdzie $a = |AB|$ i $b = |CD|$.

Zadanie 207.

Długości boków trójkąta ABC, gdzie $|BC| < |AC| < |AB|$, są kolejnymi liczbami naturalnymi oraz $|\angle ACB| = 2|\angle BAC|$. W odległości $\frac{5\sqrt{7}}{6}$ od punktu C poprowadzono prostą równoległą do prostej AB rozcinającą trójkąt ABC na dwie figury. Oblicz pole powstałego trapezu oraz długości jego przekątnych.

Zadanie 208.

Długości boków czworokąta, w który można wpisać koło i na którym można opisać koło, są równe a, b, c, d. Udowodnij, że pole S tego czworokąta wyraża się wzorem $S = \sqrt{abcd}$.

Zadanie 209.

Boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 4$ i $|AC| = |BC| = 8$.
Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC.

Zadanie 210.

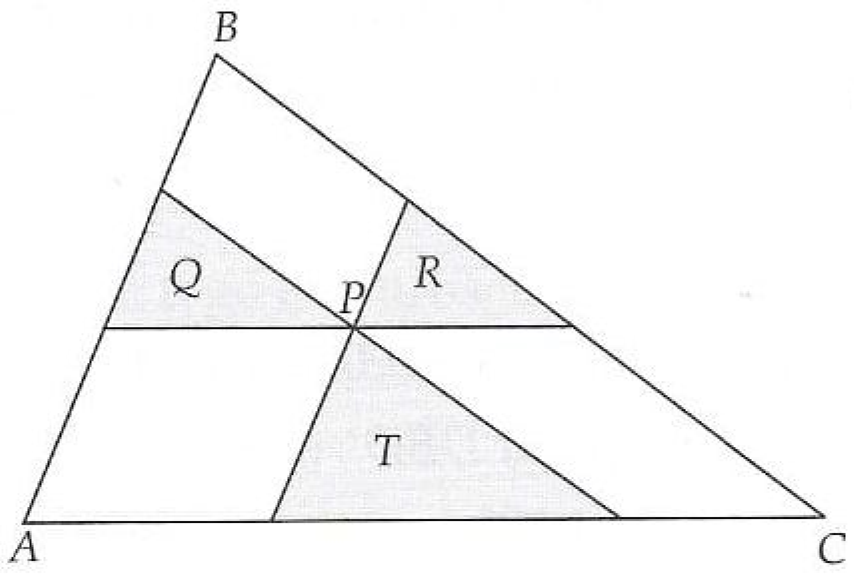
Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC dane są odpowiednio punkty M, N i P takie, że

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{|PC|}{|PA|}=k.$$

Wyznacz k, jeżeli pole trójkąta MNP jest równe $\frac{7}{25}$ pola trójkąta ABC.

Zadanie 211.

Przez punkt wewnętrzny P trójkąta ABC poprowadzono proste równoległe do wszystkich boków. Wycięły one trzy trójkąty o polach odpowiednio równych Q, R i T.



Udowodnij, że jeżeli S jest polem trójkąta ABC, to $\sqrt{S}=\sqrt{Q}+\sqrt{R}+\sqrt{T}$.