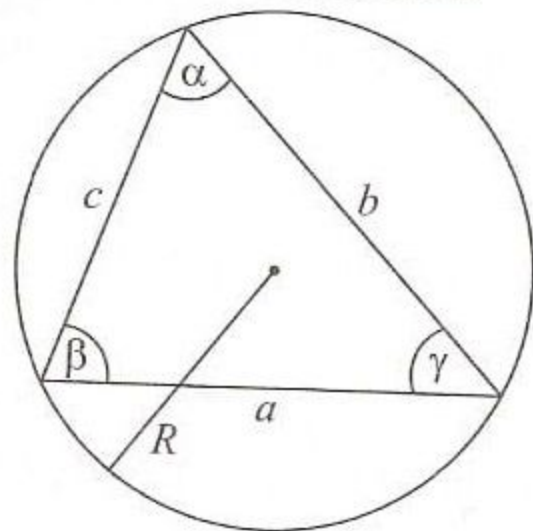


5. ZWIĄZKI MIAROWE W DOWOLNYM TRÓJKĄCIE

5.1 TWIERDZENIE SINUSÓW

DEFINICJE I TWIERDZENIA

TWIERDZENIE SINUSÓW



W każdym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa przeciwległego kąta jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

TO WARTO WIEDZIEĆ

⇒ Jeśli w trójkącie znamy długość jednego z boków i miary dwóch kątów, to możemy znaleźć miarę trzeciego kąta (*suma kątów w trójkącie jest równa 180°*) i długości pozostałych boków trójkąta (*korzystając z tw. sinusów*).

ZADANIA

439. W trójkącie ABC mamy dane: $|BC| = 3\sqrt{2}$, $|\angle CAB| = 45^\circ$, $|\angle ACB| = 30^\circ$. Oblicz długość boku AB .
440. Dwa kąty trójkąta mają miary α i β , a bok przeciwległy kątowi o mierze α ma długość a . Znajdź długości pozostałych boków trójkąta.
441. W trójkącie KLM bok KM ma długość $\sqrt{15}$, a kąty L i M mają miary równe odpowiednio 60° i 75° . Oblicz długość boku LM .
442. Jeden z boków trójkąta ma długość $\sqrt{3}$, a kąty przyległe do tego boku mają miary 45° i 15° . Oblicz długość boku przeciwległego kątowi o mierze 45° .

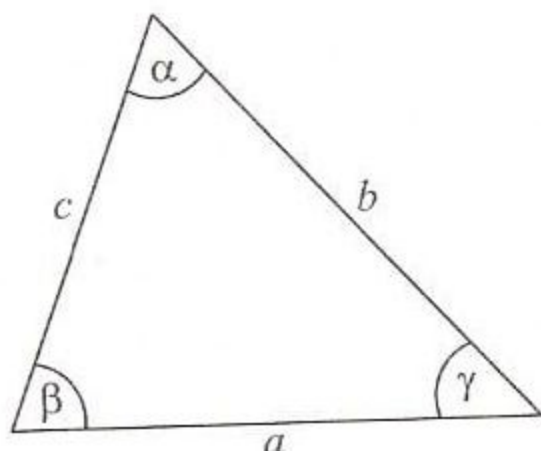
- 443.** Jeden z boków trójkąta ma długość c , a miary kątów przyległych do tego boku są równe α i β . Wyznacz długości pozostałych boków trójkąta.
- 444.** Oblicz miary kątów BAC i ABC trójkąta ABC , jeśli
- $|AB| = \sqrt{6}$, $|AC| = 2$, $|\angle ACB| = 60^\circ$;
 - $|AB| = 2$, $|AC| = 2\sqrt{3}$, $|\angle ACB| = 30^\circ$;
 - $|AB| = \sqrt{2}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $|\angle ACB| = 45^\circ$.
- 445.** W trójkącie ABC bok AB ma długość 6, a kąt ACB ma miarę 45° . Znajdź długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
- 446.** Jeden z boków trójkąta ma długość 5, a miary kątów przyległych do tego boku są równe 10° i 20° . Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 447.** Znajdź promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie a i kącie przy podstawie α .
- 448.** W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt. Wyznacz obwód tego trójkąta znając miary dwóch jego kątów α i β .
- 449.** Jeden z boków trójkąta jest dwa razy krótszy od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz sinus i kosinus kąta przeciwległego temu bokowi.
- 450.*** W okrąg o promieniu 1 wpisano trójkąt, którego dwa boki mają długość 1 i $\sqrt{2}$. Oblicz miary kątów trójkąta.
- 451.*** Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długości 5 (a) i 6 (b), zaś wysokość poprowadzona do trzeciego boku ma długość 4 (h). Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 452.*** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 10, a ramię 6. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 453.*** Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 6 (b). Promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 5 (R). Oblicz długość podstawy trójkąta.
- 454.*** Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona do podstawy ma długość 18 (h). Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli stosunek długości ramienia do długości podstawy wynosi $5 : 8$ ($m : n$).
- 455.**** W rozwartokątnym trójkącie równoramiennym ABC , gdzie $|AC| = |BC|$ i $|\angle ACB| = 2\alpha$, odległość środka okręgu wpisanego w trójkąt od wierzchołka A jest równa d . Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .

- 456.** Dwa kąty trójkąta mają miary α i β , a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość r . Znajdź promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 457.** Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość a i jest cztery razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz długości promieni okręgów opisanych na trójkątach otrzymanych z podziału danego trójkąta środkową poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.
- 458.* Punkt K należy do podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC ($A \neq K \neq B$). Znajdź stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach AKC i KBC .
- 459.** W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną kąta ACB , która przecina bok AB w punkcie K . Wyznacz stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach AKC i KBC wiedząc, że $|AC| = a$, zaś $|BC| = b$.
- 460.*** W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości przecinają się w punkcie K . Znajdź stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABK .
- 461.* Dwa kąty czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu 4 mają miary 30° i 135° . Oblicz długości przekątnych tego czworokąta.
- 462.* W trapezie równoramiennym $ABCD$ ($AB \parallel CD$) dane jest: $|AC| = c$, $|\angle CAB| = \alpha$ i $|\angle ACB| = \gamma$. Oblicz długości boków trapezu.
- 463.* W trapezie równoramiennym przekątna ma długość d , a kąt ostry ma miarę α . Znajdź promień okręgu opisanego na tym trapezie.
- 464.** Podstawy AB i CD trapezu równoramiennego $ABCD$ mają długości odpowiednio 8 i 6, a wysokość ma długość 7. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trapezie.
- 465.*** Stosunek długości podstaw trapezu równoramiennego jest równy 1: 5, jego ramię ma długość c . Znajdź promień okręgu opisanego na trapezie wiedząc, że w trapez ten można wpisać okrąg.
- 466.*** Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny o kącie ostrym α . Znajdź promień okręgu opisanego na tym trapezie.
- 467.** Wykorzystując twierdzenie sinusów udowodnij twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.
- 468.** Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym o bokach różnej długości naprzeciwko najdłuższego boku znajduje się kąt o największej mierze.

5.2 TWIERDZENIE KOSINUSÓW

DEFINICJE I TWIERDZENIA

TWIERDZENIE KOSINUSÓW



W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku jest równy różnicy sumy kwadratów długości pozostałych boków i podwojonego iloczynu długości tych boków przez kosinus kąta zawartego między nimi.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

TO WARTO WIEDZIEĆ

⇒ Mając dane

- dwa boki trójkąta i kąt między tymi bokami można wyznaczyć (jednoznacznie) trzeci bok (korzystając z tw. kosinusów).
- trzy boki trójkąta lub stosunki długości boków można znaleźć wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta trójkąta (korzystając z tw. kosinusów i wykorzystując związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta).

ZADANIA

- 469.** Długości dwóch boków trójkąta są równe a i b , zaś kąt między tymi bokami ma miarę γ . Oblicz długość trzeciego boku trójkąta, jeśli
- $a=1, \quad b=4, \quad \gamma=60^\circ;$
 - $a=\sqrt{2}, \quad b=3, \quad \gamma=45^\circ;$
 - $a=2, \quad b=3\sqrt{3}, \quad \gamma=150^\circ.$
- 470.*** Długości dwóch boków trójkąta wynoszą 7 i 20, a sinus kąta zawartego między nimi jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz długość trzeciego boku, jeśli kąt między danymi bokami jest a) ostry; b) rozwarty.
- 471.*** W trójkącie ABC boki AB i BC mają długości odpowiednio równe 5 i 42, a kąt ABC ma miarę 60° . Oblicz odległość środka ciężkości trójkąta od wierzchołka A .
- 472.*** Dwa boki trójkąta mają długości $\sqrt{13}$ i $4\sqrt{3}$, a kąt przeciwległy krótszemu z nich ma miarę 30° . Oblicz długość trzeciego boku.

473. Boki trójkąta mają długości 4, 5, 7. Oblicz kosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw boku o długości 7.
474. Oblicz miarę najmniejszego kąta trójkąta o bokach długości $4\sqrt{2}$, 5, 7.
475. Oblicz miarę największego kąta trójkąta o bokach długości 7, 8, 13.
- 476.* Rozstrzygnij, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątnym
a) 9, 40, 41; b) 7, 15, 17; c) 8, 16, 17; d) 9, 40, 42.
- 477.* Długości boków trójkąta są w stosunku 4 : 5 : 6. Wyznacz kosinus najmniejszego kąta tego trójkąta.
- 478.* Długości boków trójkąta są w stosunku 2 : 3 : 4. Wyznacz tangens największego kąta tego trójkąta.
- 479.* Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość $2 - \sqrt{2}$, a kąt przy podstawie ma miarę $67,5^\circ$. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.
- 480.* Różnica długości dwóch boków trójkąta jest równa 5, a kąt między tymi bokami ma miarę 60° . Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że jego trzeci bok ma długość 7.
- 481.* Jeden z boków trójkąta ma długość $\sqrt{21}$, a kąt przeciwległy temu bokowi ma miarę 60° . Oblicz długości pozostałych boków trójkąta wiedząc, że jeden z nich jest pięć razy dłuższy od drugiego.
- 482.* Jeden z boków trójkąta ma długość 14, a kąt przeciwległy temu bokowi ma miarę 120° . Oblicz długości pozostałych boków trójkąta wiedząc, że stosunek ich długości jest równy 3 : 5.
- 483.** Jeden z kątów trójkąta ma miarę α . Stosunek długości boków zawartych w ramionach tego kąta jest równy 4 : 1, a środkowa poprowadzona do dłuższego z nich ma długość s . Znajdź długości boków tego trójkąta.
- 484.* Długości boków równoległoboku są równe 5 i 8. Miara kąta ostrego tego równoległoboku wynosi 60° . Oblicz długości przekątnych równoległoboku.
- 485.* Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 60° (α), a ich długości wynoszą 2 (p) i 6 (q). Znajdź długości boków równoległoboku.
- 486.* Przekątna AC czworokąta $ABCD$ ma długość $\sqrt{5}$ i tworzy z bokiem AB kąt o mierze 45° . Przekątna BD ma długość $5\sqrt{3}$ i tworzy z bokiem BC kąt o mierze 30° . Oblicz długość boku CD wiedząc, że bok AB ma długość $2\sqrt{10}$.

- 487.**** Długości kolejnych boków czworokąta wypukłego wynoszą $2\sqrt{2}$, 3, 4 i 5. Kąt, którego ramiona zawierają boki o długościach $2\sqrt{2}$ i 5 ma miarę 45° . Znajdź miarę kąta utworzonego przez boki o długościach 3 i 4.
- 488.**** Przyprostokątne AB i AC trójkąta prostokątnego ABC mają długości równe odpowiednio 24 i 7. Punkt K należy do przeciwprostokątnej trójkąta, przy czym $|CK| : |KB| = 1 : 4$. Oblicz długość odcinka AK .
- 489.**** Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz długość krótszej przekątnej.
- 490.**** Boki trójkąta mają długości 4 (a), 8 (b), 10 (c). Oblicz długość środkowej trójkąta poprowadzonej do boku o długości 10 (c).
- 491.**** Oblicz tangens kąta ostrego utworzonego przez środkowe trójkąta prostokątnego równoramiennego poprowadzone do przyprostokątnych.
- 492.***** Wykaż, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego wszystkich boków.
- 493.***** Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 5, a środkowa poprowadzona do trzeciego boku ma długość 2. Oblicz długość trzeciego boku.
- 494.**** Środkowe trójkąta ABC poprowadzone do boków AC i BC przecinają się pod kątem prostym, a stosunek ich długości jest równy 2 : 1. Oblicz kosinus kąta ACB .
- 495.***** Oblicz długości przekątnych równoległoboku wiedząc, że ich stosunek wynosi 2 : 3, a boki równoległoboku mają długości 11 i 23.
- 496.***** Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Oblicz długość przekątnej AC , jeśli $|AB| = 10$, $|BC| = 3$, $|CD| = 6$ i $|AD| = 5$.
- 497.***** W trójkącie o bokach 10, 15, 20 poprowadzono dwusieczną kąta przeciwległego najdłuższemu bokowi. Oblicz długość odcinka, który jest częścią wspólną tej dwusiecznej i trójkąta.
- 498.***** Środkowe trójkąta mają długości p , q , r . Znajdź długość boku, do którego poprowadzono środkową o długości p .

5.3 TW. SINUSÓW, TW. KOSINUSÓW, POLA WIELOKĄTÓW

TO WARTO WIEDZIEĆ

⇒ Znając w trójkącie

- dwa boki i kąt zawarty między nimi (bkb)
- bok i dwa kąty (kbk)
- trzy boki (bbb)

możemy znaleźć pozostałe boki i kąty (ew. wartości funkcji trygonometrycznych kątów) trójkąta (np. wykorzystując twierdzenie sinusów i twierdzenie kosinusów).

⇒ Znając wszystkie boki i kąty (ew. wartości funkcji trygonometrycznych kątów) trójkąta, możemy znaleźć

- pole trójkąta (np. wykorzystując wzór $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$)
- promień okręgu wpisanego w trójkąt (np. wykorzystując wzór $P = \frac{1}{2}r(a+b+c)$)
- promień okręgu opisanego (np. korzystając z twierdzenia sinusów)
- środkowe trójkąta (np. korzystając z twierdzenia kosinusów).

ZADANIA

- 499.* Jeden z kątów trójkąta ma miarę 120° , a boki zawarte w ramionach tego kąta mają długości 2 i $\sqrt{3} - 1$. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw boku o długości 2.
- 500.* Jeden z boków trójkąta ma długość a , zaś kąty przyległe do tego boku mają miary β i γ . Znajdź pole trójkąta.
- 501.* Dwa boki trójkąta mają długości 2 i 8, a kąt między nimi ma miarę 60° . Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 502.* Boki trójkąta mają długości 4, 13, 15. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 503.** Dwa boki trójkąta mają długość 2 i 3, a kąt między nimi ma miarę 60° . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do trzeciego boku.
- 504.** Punkt P należy do boku BC trójkąta równobocznego ABC i dzieli ten bok na odcinki, których stosunek jest równy 2:1. Oblicz pole tego trójkąta wiedząc, że $|AP| = d$.

- 505.**** Dwa kąty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R mają miary α i β . Znajdź pole trójkąta i długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 506.**** Dwa boki trójkąta o polu 3 mają długości 2 i 5. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie i promienia okręgu weń wpisanego.
- 507.**** Długości boków trójkąta są w stosunku $2:3:4$, a najkrótszy z boków ma długość a . Znajdź długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 508.**** Miary kątów trójkąta o obwodzie m są równe α , β i γ . Znajdź długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie i pole trójkąta.
- 509.***** Dwa kąty trójkąta o polu P mają miary α i β . Wyznacz obwód trójkąta.
- 510.***** Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Znajdź długość trzeciego boku.
- 511.***** Dwa kąty trójkąta mają miary α i β , a środkowa poprowadzona z wierzchołka trzeciego kąta ma długość s . Znajdź długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 512.**** W rombie o boku a i kącie ostrym α poprowadzono z wierzchołka kąta ostrego odcinki do przeciwległych boków tak, że podzieliły one romb na trzy części o równych polach. Oblicz długości każdego z tych odcinków.
- 513.**** Jedna z przekątnych równoległoboku ma długość d i dzieli jego kąt ostry na kąty o miarach α i β . Oblicz pole równoległoboku.
- 514.***** Oblicz pole równoległoboku o kącie ostrym α i przekątnych p i q ($p > q$).
- 515.***** Kąt ostry między przekątnymi równoległoboku o bokach długości a i b ($a > b$) ma miarę γ . Oblicz pole równoległoboku.
- 516.***** Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD są równe odpowiednio R_C i R_D .