EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI

Arkusz próbny nr 3
POZIOM ROZSZERZONY

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–17).
2. Rozwiązania zadań wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Czas pracy:
180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

Zadanie 1. (0–1)

Punkty $A(-2, 4)$ oraz $B(-1, 3)$ należą do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a^x}{b}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz $a > 0$, $b \neq 0$. Wynika stąd, że:

A. $a \cdot b = 3$ B. $a \cdot b = \frac{27}{16}$ C. $a + b = 3$ D. $a + b = \frac{43}{36}$

Zadanie 2. (0–1)

Obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ w jednokładności o środku w punkcie O i skali $k = -2$ jest wektor $\overrightarrow{A'B'}$. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ są przeciwne B. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{A'B'}\right|$

C. $|AA'| = 2 \cdot |OA|$ D. $\left|\overrightarrow{BB'}\right| = 3 \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\cos\frac{\pi}{12}$ jest równa:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Zadanie 4. (0–1)

Dla pewnej wartości parametru a funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a - |x-3| & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{2}\left(x^2 + 2ax - 1\right) & \text{dla } x \in \langle -1, +\infty) \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = -1$. Wtedy a jest liczbą:

A. pierwszą B. złożoną
C. całkowitą ujemną D. należącą do przedziału $(0, 2)$.

Zadanie 5. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - x^3$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Funkcja $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ przyjmuje wartość równą -1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ B. $x \in (2, +\infty)$
C. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$ D. $x \in (0, 2)$

Zadanie 6. (0–2)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$ jest równa $372\left(\sqrt{3}+1\right)$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu. Zakoduj wynik, podając cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i pierwszą cyfrę po przecinku przybliżenia dziesiętnego otrzymanej liczby z dokładnością do 0,1.

Zadanie 7. (0–2)

Ciąg (a_n) jest zdefiniowany w następujący sposób: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 0{,}15, \quad n \geq 1 \text{ i } n \in N. \end{cases}$

Oblicz sumę wszystkich kolejnych wyrazów ciągu (a_n), od wyrazu a_{30} do wyrazu a_{50} włącznie. Zakoduj wynik, podając cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej sumy.

Zadanie 8. (0–2)

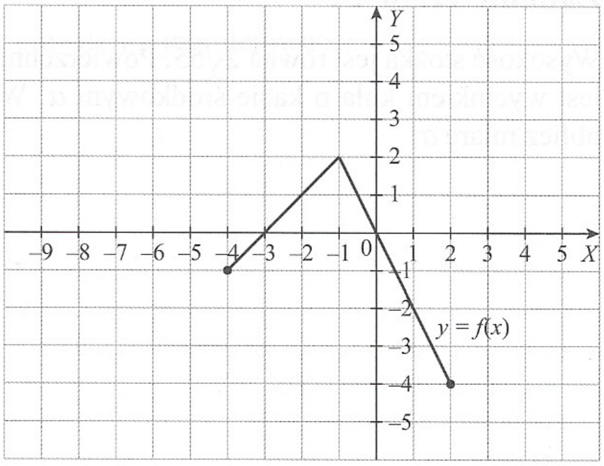
Przekrój czworościanu foremnego płaszczyzną przechodzącą przez wysokość podstawy i wierzchołek bryły jest trójkątem równoramiennym. Oblicz sinus kąta utworzonego przez ramiona tego trójkąta. Zakoduj wynik, podając trzy kolejne cyfry po przecinku przybliżenia dziesiętnego otrzymanej liczby z dokładnością do 0,001.

Zadanie 9. (0–3)

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne AD ($D \in BC$) oraz CE ($E \in AB$) kątów CAB i ACB. Dwusieczne te przecięły się w punkcie P. Wykaż, że jeśli na czworokącie $PEBD$ można opisać okrąg, to $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle ACP| = 60°$.

Zadanie 10. (0–3)

Na rysunku obok dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $D = \langle -4, 2\rangle$. W tym samym układzie współrzędnych narysuj wykres funkcji $y = g(x)$, gdzie $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Następnie podaj wzór funkcji g bez użycia symbolu funkcji f, wraz z dziedziną.



Zadanie 11. (0–3)

Wysokość stożka jest równa $2\sqrt{55}$. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest wycinkiem koła o kącie środkowym α. Wiedząc, że pole tego wycinka jest równe 96π, oblicz miarę α.

Zadanie 12. (0–4)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność
$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 9 > 0$.

Zadanie 13. (0–4)

Udowodnij, że jeśli $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$ oraz $\log_{\frac{1}{3}} a \cdot \log_{\frac{1}{3}} b = 4$, to $a \cdot b \le \frac{1}{81}$.

Zadanie 14. (0–5)

Z liczb należących do zbioru $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$, gdzie $n \geq 3$ i $n \in N$, tworzymy wszystkie trójwyrazowe ciągi. Prawdopodobieństwo utworzenia ciągu rosnącego lub ciągu malejącego jest równe 0,285. Oblicz n.

Zadanie 15. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których dwa różne rozwiązania równania $x^2 - 2 \cdot (k-3)x - k + 3 = 0$ należą do przedziału $(-2, 0)$.

Zadanie 16. (0–5)

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB zawiera się w prostej $k\colon x - y - 15 = 0$, zaś ramię BC zawiera się w prostej $l\colon x + 2y - 12 = 0$. Punkt $P(2, -1)$ należy do ramienia AC. Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną na podstawę AB.

Zadanie 17. (0–7)

Rozważamy zbiór wszystkich trapezów równoramiennych o przekątnej długości $10\sqrt{6}$. Wyznacz sumę długości podstaw tego trapezu, którego pole jest największe. Jaką wartość ma to pole?