zaś malejąca w każdym z przedziałów: $(-2, -1)$ oraz $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$. Jeśli $m = -2$, to funkcja ma jedyne maksimum lokalne, $f_{\max}(-2) = -4$. Badamy, czy -4 jest wartością największą funkcji f. W tym celu obliczamy granice funkcji f na krańcach przedziałów, w których jest ona określona:

$$\lim_{m\to-\infty}\frac{m^2}{m+1} = \lim_{m\to-\infty}\frac{m}{1+\frac{1}{m}} = -\infty \qquad \lim_{m\to-1^-}\frac{m^2}{m+1} = -\infty \qquad \lim_{m\to-1^+}\frac{m^2}{m+1} = +\infty \qquad \lim_{m\to-\frac{3}{4}}\frac{m^2}{m+1} = 2\frac{1}{4}$$

Na podstawie trzeciej granicy stwierdzamy, że funkcja f nie ma wartości największej; w szczególności maksimum lokalne nie jest wartością największą funkcji f.

Odpowiedzi i rozwiązania do arkusza próbnego nr 3

Nr zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	D	D	C	A	B

Zadanie 6.

2	7	6

Rozwiązanie:

Niech a_1 oznacza pierwszy wyraz ciągu (a_n). Korzystamy ze wzoru $S = \frac{a_1}{1-q}$;

$$\frac{a_1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 372\left(\sqrt{3}+1\right),$$ skąd $a_1 = 124\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$, czyli $a_1 = 248\sqrt{3}$. Obliczamy a_6:

$$a_6 = 248\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 = \frac{248}{9} = 27{,}5555... \approx 27{,}6.$$

Zadanie 7.

3	8	5

Rozwiązanie:

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = 1$ oraz $r = 0{,}15$. Niech s oznacza szukaną sumę. Wówczas $s = a_{30} + a_{31} + \ldots + a_{50} = S_{50} - S_{29}$. Ponieważ

$S_{50} = \frac{2\cdot 1 + 49\cdot 0{,}15}{2}\cdot 50 = 233{,}75$ oraz $S_{29} = \frac{2\cdot 1 + 28\cdot 0{,}15}{2}\cdot 29 = 89{,}9$, więc $s = 143{,}85$.

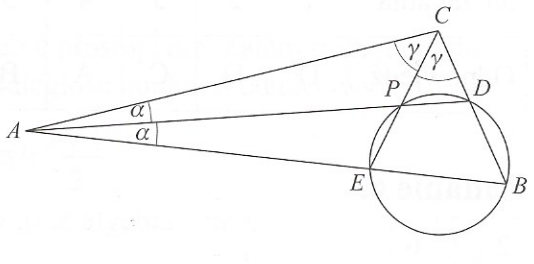
Zadanie 8.

9	4	3

Rozwiązanie:
Niech a oznacza długość krawędzi podstawy czworościanu foremnego, $a > 0$. Przekrój jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości a i ramionach długości $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Niech α oznacza miarę kąta utworzonego przez ramiona trójkąta. Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy $a^2 = 2\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\cos\alpha$, skąd $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Korzystamy z „jedynki trygonometrycznej" i otrzymujemy: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,942809... \approx 0,943$.

Zadanie 9.

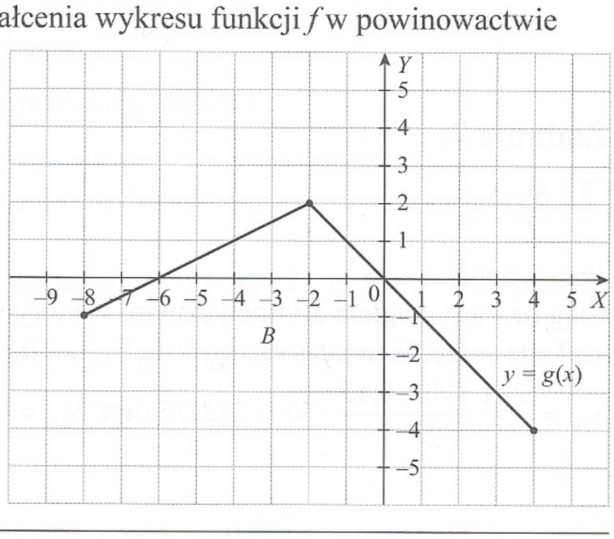
Rozwiązanie:
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.



W trójkącie ABC otrzymujemy
$|\sphericalangle ABC| = 180° - (2\alpha + 2\gamma)$
Z założenia, że na czworokącie $PEBD$ można opisać okrąg, wnioskujemy, że
$|\sphericalangle EPD| = 180° - [180° - (2\alpha + 2\gamma)] = 2\alpha + 2\gamma$
Kąty APC i EPD to kąty wierzchołkowe, więc
$|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle EPD| = 2\alpha + 2\gamma$
Suma kątów w trójkącie APC jest równa 180°, zatem
$\alpha + \gamma + (2\alpha + 2\gamma) = 180°$, skąd
$\alpha + \gamma = 60° = |\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle ACP|$, co kończy dowód.

Zadanie 10. $g(x) = \begin{cases} 0,5x + 3 & \text{wtedy, gdy } x \in \langle -8, -2\rangle \\ -x & \text{wtedy, gdy } x \in (-2, 4\rangle \end{cases}$

Rozwiązanie:
Wykres funkcji g powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f w powinowactwie prostokątnym o osi OY i skali 2.
Ponieważ
$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{wtedy, gdy } x \in \langle -4, -1\rangle \\ -2x & \text{wtedy, gdy } x \in (-1, 2\rangle \end{cases},$$
więc $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + 3$, jeśli $\frac{x}{2} \in \langle -4, 1\rangle$, oraz $f\left(\frac{x}{2}\right) = -x$, jeśli $\frac{x}{2} \in (-1, 2\rangle$, skąd otrzymujemy wzór funkcji g.



Zadanie 11. $\alpha = 135°$

Rozwiązanie:

Na podstawie własności stożka mamy $\pi rl = 96\pi$ oraz $l^2 = h^2 + r^2$, gdzie r, h, l oznaczają odpowiednio promień podstawy stożka, wysokość stożka i długość tworzącej stożka. Ponieważ $h = 2\sqrt{55}$, więc otrzymujemy układ dwóch równań z niewiadomymi r, l: $\begin{cases} l = \dfrac{96}{r} \\ l^2 = 220 + r^2 \end{cases}$.

Zatem $\dfrac{96^2}{r^2} = 220 + r^2$, skąd $r^4 + 220r^2 - 9216 = 0$. Niech $t = r^2$; wówczas $t^2 + 220t - 9216 = 0$; $\sqrt{\Delta} = 292$, $t_1 < 0$, $t_2 = 36$, więc $r = 6$ oraz $l = 16$. Obliczamy miarę kąta α: $\dfrac{2\pi r}{2\pi l} = \dfrac{\alpha}{360°}$, czyli $\alpha = \dfrac{6}{16} \cdot 360° = 135°$.

Zadanie 12.

Rozwiązanie:

I sposób. Przekształcamy lewą stronę nierówności:

$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 9 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \underline{4x} - \underline{4x} + 8 + 1 =$
$= x^3 \cdot (x-2) - 2x \cdot (x-2) - 4 \cdot (x-2) + 1 = (x-2)(x^3 - 2x - 4) + 1$. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $(x^3 - 2x - 4)$; mamy $(x^3 - 2x - 4) : (x-2) = x^2 + 2x + 2$. Zatem
$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 9 = (x-2)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2) + 1$.
$(x-2)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2) + 1 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Uzasadnienie:
$(x-2)^2 \geq 0$, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną;
$(x^2 + 2x + 2) > 0$, bo $\Delta < 0$ i współczynnik przy x^2 jest dodatni;
$(x-2)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2) \geq 0$, bo iloczyn liczby nieujemnej i liczby dodatniej jest liczbą nieujemną;
$(x-2)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2) + 1 > 0$, bo suma liczby nieujemnej i liczby dodatniej jest liczbą dodatnią.

II sposób. Wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 9$, $x \in \mathbf{R}$. W tym celu wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x = 2x(2x^2 - 3x - 2)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \lor x = -0{,}5 \lor x = 2)$. Obliczamy wartości funkcji f dla otrzymanych argumentów: $f(0) = 9$; $f(-0{,}5) = 8\frac{13}{16}$; $f(2) = 1$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, więc najmniejszą wartością funkcji f jest liczba 1. Zatem $f(x) \geq 1 > 0$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbf{R}$.

Zadanie 13.

Rozwiązanie:

Jeśli $a \in (0, 1)$ i $b \in (0, 1)$, to liczby $\log_{\frac{1}{3}} a$ oraz $\log_{\frac{1}{3}} b$ są dodatnie.

Korzystamy z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich x i y: $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$; w naszym przypadku $x = \log_{\frac{1}{3}} a$, $y = \log_{\frac{1}{3}} b$. Wówczas

$\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} b}{2} \geq \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} a \cdot \log_{\frac{1}{3}} b}$. Po lewej stronie nierówności korzystamy ze wzoru na sumę logarytmów, a po prawej – z założenia, że $\log_{\frac{1}{3}} a \cdot \log_{\frac{1}{3}} b = 4$. Otrzymujemy

$\log_{\frac{1}{3}}(ab) \geq 4$, skąd $\log_{\frac{1}{3}}(ab) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^4$. Funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ jest malejąca, wobec tego

$ab \leq \frac{1}{81}$, co kończy dowód.

Zadanie 14. $n = 20$

Rozwiązanie:

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzyelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru X, zatem $\overline{\overline{\Omega}} = n^3$. Jest to model klasyczny, czyli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy ciąg rosnący lub ciąg malejący. Wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

$\binom{n}{3}$ – na tyle sposobów możemy utworzyć 3-elementowe podzbiory n-elementowego zbioru X.

Otrzymany zbiór liczb możemy uporządkować na 1 sposób rosnąco i na 1 sposób malejąco.

Wobec tego $\overline{\overline{A}} = 2 \cdot \binom{n}{3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3}$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

$P(A) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{3n^2}$. Otrzymujemy równanie $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{3n^2} = 0{,}285$, gdzie $n \geq 3$ i $n \in N$.

Mamy $29n^2 - 600n + 400 = 0$; $\sqrt{\Delta} = 560$; $n_1 = \frac{20}{29}$, $n_2 = 20$. Liczba n_1 nie spełnia założeń.

Zadanie 15. $k \in \left(1\frac{2}{3}, 2\right)$

Rozwiązanie:

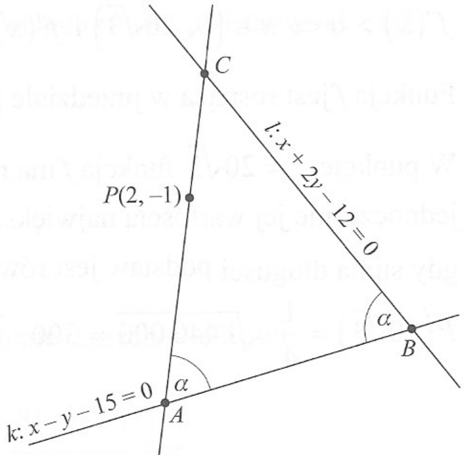
Warunki zadania równoważne są temu, że funkcja f, gdzie $f(x) = x^2 - 2 \cdot (k-3)x - k + 3$, ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 0)$.

A zatem muszą być spełnione jednocześnie następujące warunki: $\Delta > 0$, $f(-2) > 0$, $f(0) > 0$, $x_w \in (-2, 0)$. Otrzymujemy: $\Delta > 0 \Leftrightarrow k \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$; $f(-2) > 0 \Leftrightarrow k \in \left(1\frac{2}{3}, +\infty\right)$; $f(0) > 0 \Leftrightarrow k \in (-\infty, 3)$; $x_w \in (-2, 0) \Leftrightarrow k \in (1, 3)$. Wyznaczamy część wspólną wyznaczonych zbiorów: $k \in \left(1\frac{2}{3}, 2\right)$.

Zadanie 16. $12\sqrt{2}$

Rozwiązanie:

Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AC| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$. Obliczamy tg α, gdzie α jest kątem utworzonym przez proste k: $x - y - 15 = 0$ i l: $x + 2y - 12 = 0$;



$\operatorname{tg}\alpha = \left|\dfrac{1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}\right| = 3$. Do prostej AC: $y = ax + b$ należy punkt $P(2, -1)$, więc prosta AC ma równanie: $ax - y - 2a - 1 = 0$. Obliczamy współczynnik kierunkowy a; korzystamy ponownie ze wzoru na tangens kąta ostrego α utworzonego przez dwie proste dane równaniami ogólnymi i otrzymujemy $\left|\dfrac{1-a}{a+1}\right| = 3$, skąd $a = -2$ lub $a = -\dfrac{1}{2}$.

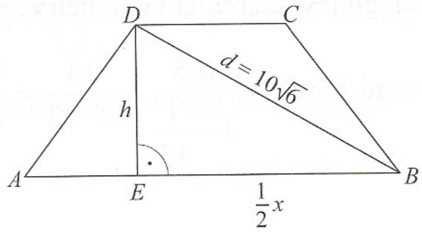
Jeśli $a = -\dfrac{1}{2}$, to prosta ma równanie $x + 2y = 0$ i jest równoległa do prostej l, więc nie spełnia warunków zadania. Jeśli $a = -2$, to otrzymujemy równanie prostej AC: $2x + y - 3 = 0$. Wyznaczamy współrzędne punktu C, rozwiązując układ równań $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$, skąd $C(-2, 7)$.

Obliczamy wysokość trójkąta poprowadzoną na podstawę AB, jako odległość wierzchołka C od prostej k. Otrzymujemy: $h = \dfrac{|-2 - 7 - 15|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 12\sqrt{2}$.

Zadanie 17. suma długości podstaw $= 20\sqrt{3}$, pole trapezu $= 300$

Rozwiązanie:

W trapezie równoramiennym długość odcinka EB jest średnią arytmetyczną długości podstaw trapezu. Oznaczamy $x = |AB| + |DC|$; wówczas $|EB| = \dfrac{1}{2}x$, gdzie $x \in \left(0,\ 20\sqrt{6}\right)$.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBD mamy:

$h^2 + \dfrac{1}{4}x^2 = 600$, skąd $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{2400 - x^2}$.

Pole trapezu, w zależności od sumy długości jego podstaw, wyraża się wzorem

$P(x) = \dfrac{1}{4}x \cdot \sqrt{2400 - x^2} = \dfrac{1}{4} \cdot \sqrt{2400x^2 - x^4}$, gdzie $x \in \left(0,\ 20\sqrt{6}\right)$.

Rozważamy funkcję $f(x) = 2400x^2 - x^4$, $D_f = \left(0,\ 20\sqrt{6}\right)$. Pole trapezu jest największe wtedy, gdy funkcja f przyjmuje największą wartość w zbiorze $\left(0,\ 20\sqrt{6}\right)$. Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 4800x - 4x^3$, $x \in \left(0,\ 20\sqrt{6}\right)$. Zauważamy, że $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{3}$ oraz $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0,\ 20\sqrt{3}\right)$ i $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(20\sqrt{3},\ 20\sqrt{6}\right)$.

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0,\ 20\sqrt{3}\right)$ i malejąca w przedziale $\left(20\sqrt{3},\ 20\sqrt{6}\right)$.

W punkcie $x = 20\sqrt{3}$ funkcja f ma maksimum lokalne, $f_{\max}\left(20\sqrt{3}\right) = 1\,440\,000$, które jest jednocześnie jej wartością największą. Zatem pole trapezu jest największe wtedy, gdy suma długości podstaw jest równa $20\sqrt{3}$. Największe pole ma wartość $P\left(20\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1\,440\,000} = 300$.