EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz próbny nr 4
POZIOM ROZSZERZONY

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–16).
2. Rozwiązania zadań wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Czas pracy: 180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

Zadanie 1. (0–1)

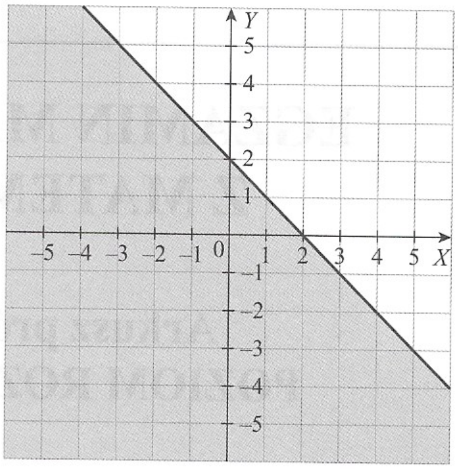
Wybierz równanie prostej prostopadłej do prostej k: $2x - 3y + 1 = 0$.

A. $3x - 2y - 1 = 0$ B. $-0{,}5x - 3y + 1 = 0$ C. $2x + 3y - 1 = 0$ D. $3x + 2y + 1 = 0$

Zadanie 2. (0–1)

Na rysunku obok jest zaznaczony zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają nierówność:

A. $x + y + 2 \geq 0$ B. $x - y + 2 \leq 0$
C. $x + y - 2 \leq 0$ D. $x - y - 2 \geq 0$



Zadanie 3. (0–1)

Okresem podstawowym funkcji $f(x) = \sin(\pi x + 4)$ określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$ jest liczba:

A. 2 B. 4 C. π D. $\frac{\pi}{4}$

Zadanie 4. (0–1)

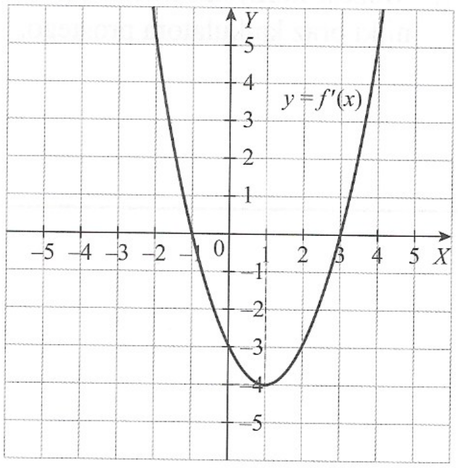
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 5x + c$ są liczbami pierwszymi. Z tego wynika, że

A. $c = -48$ B. $c = 4$ C. $c = 6$ D. $c = -6$

Zadanie 5. (0–1)

Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji pochodnej $y = f'(x)$ funkcji wielomianowej $y = f(x)$. Z wykresu wynika, że funkcja f jest malejąca w przedziale:

A. $(-\infty, -4)$ B. $(-1, 3)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-3, 3)$



Zadanie 6. (0–2)

Dany jest nieskończony ciąg (a_n), określony rekurencyjnie: $\begin{cases} a_1 = 0,5 \\ a_{n+1} = \dfrac{13 \cdot a_n}{1+2+3+\ldots+25}, n \geq 1 \end{cases}$

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n). Wynik zakoduj, podając cyfrę jedności i dwie kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 7. (0–2)

W trójkącie ABC środkowe AK i CL są do siebie prostopadłe. Wyznacz pole trójkąta ABC, wiedząc, że $|AK| = 10$ oraz $|CL| = 8$. Zakoduj wynik, podając cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że jeśli $x \neq 0$ i $a - b = x$, $a^2 - b^2 = y$ i $a^3 - b^3 = z$, to $z = \dfrac{x^4 + 3y^2}{4x}$.

Zadanie 9. (0–3)

Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 10. (0–4)

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC, przy czym $|AD| : |AB| = 2 : 5$. Środkowa AS przecina odcinek CD w punkcie P. Wyznacz $|CP| : |PD|$.

Zadanie 11. (0–4)

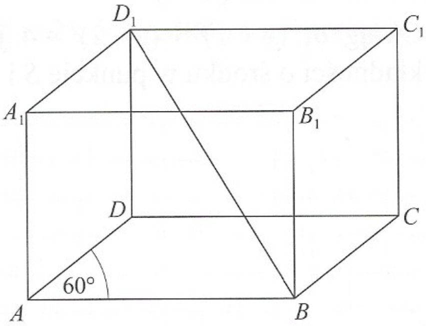
Okrąg o_2: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ jest obrazem okręgu o_1: $x^2 + y^2 - 14x + 4y + 17 = 0$ w jednokładności o środku w punkcie S i dodatniej skali k. Oblicz k i wyznacz współrzędne punktu S.

Zadanie 12. (0–4)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest romb $ABCD$, którego kąt ostry DAB ma miarę 60°. Objętość tego graniastosłupa wynosi $192\sqrt{3}$, a wysokość graniastosłupa jest równa 6.

a) Oblicz długość przekątnej BD_1.

b) Zaznacz na rysunku graniastosłupa kąt nachylenia przekątnej BD_1 do ściany ADD_1A_1 i wyznacz sinus tego kąta.



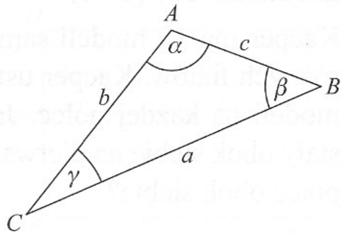
Zadanie 13. (0–4)

Kacper ma 15 modeli samochodów, wśród których są 3 modele różnych fordów i 4 modele różnych fiatów. Kacper ustawił losowo wszystkie modele w rzędach na trzech półkach, po 5 modeli na każdej półce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie modele fordów będą stały obok siebie na pierwszej półce, jeśli wiadomo, że wszystkie modele fiatów stoją na jednej półce obok siebie?

Zadanie 14. (0–6)

W trójkącie ABC dane są: $c = 3$, $\sin\gamma = 0{,}25$ oraz $a^2 - b^2 = 4$.

Udowodnij, że $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{9}$.



Zadanie 15. (0–6)

Ile jest liczb dwudziestocyfrowych, których suma cyfr jest równa 8 i jednocześnie w ich zapisie nie występują cyfry 1 oraz 6?

Zadanie 16. (0–7)

W punktach x_1, x_2 funkcja $f(x) = 2x^3 - 15ax^2 + 24a^2x + 3$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, ma odpowiednio maksimum i minimum. Wyznacz liczbę a, dla której spełniony jest warunek $x_1{}^2 = 2x_2$.