Odpowiedzi i rozwiązania do arkusza próbnego nr 4

Nr zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	D	C	A	C	B

Zadanie 6.

0	5	4

Rozwiązanie:

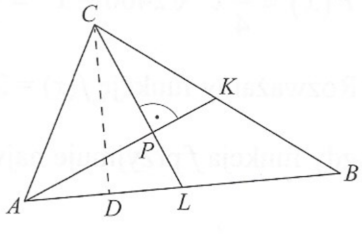
Ponieważ $1 + 3 + 5 + ... + 25 = \frac{1+25}{2} \cdot 13 = 13^2$, więc $a_{n+1} = \frac{1}{13} a_n$ dla $n \geq 1$. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym $a_1 = 0,5$ oraz $q = \frac{1}{13}$, $q \in (-1, 1)$. Suma wszystkich wyrazów ciągu jest szeregiem geometrycznym zbieżnym; obliczamy szukaną granicę: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$, skąd $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{0,5}{1-\frac{1}{13}} = \frac{13}{2\cdot 12} = \frac{13}{24} = 0,541666...$

Zadanie 7.

5	3	3

Rozwiązanie:

Niech P oznacza punkt przecięcia środkowych AK i CL.
Z twierdzenia o środkowych w trójkącie wynika, że $|AP| = \frac{2}{3} \cdot |AK| = \frac{20}{3}$. Odcinek AP jest wysokością trójkąta ACL



poprowadzoną na podstawę CL. Zatem $P_{ACL} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{20}{3} = \frac{80}{3}$. Ponadto $P_{ACL} = P_{LBC}$, bo CD jest wspólną wysokością trójkątów ACL i LBC poprowadzoną na równe podstawy AL i LB.
Stąd $P_{ABC} = 2 \cdot \frac{80}{3} = 53,(3)$.

Zadanie 8.

Rozwiązanie:

Przekształcamy wyrażenie $\frac{x^4 + 3y^2}{4x}$, wykonując podstawienie danych wielkości:

$$\frac{x^4+3y^2}{4x} = \frac{(a-b)^4 + 3\left(a^2-b^2\right)^2}{4(a-b)} = \frac{(a-b)^2 \cdot \left[(a-b)^2 + 3(a+b)^2\right]}{4(a-b)} =$$

$$= \frac{(a-b)\cdot\left[a^2 - 2ab + b^2 + 3a^2 + 6ab + 3b^2\right]}{4} = \frac{(a-b)\cdot 4 \cdot \left(a^2 - ab + b^2\right)}{4} = a^3 - b^3 = z,$$

co kończy dowód.

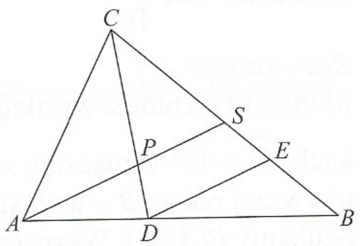
Zadanie 9. $x_1 = -3, x_2 = 5, x_3 = \frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

Ponieważ stopień wielomianu $W(x)$ jest równy 3, więc wielomian $W(x)$ ma co najwyżej trzy pierwiastki. Na podstawie twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu wiemy, że wymiernych pierwiastków wielomianu $W(x)$ należy szukać wśród liczb mających postać $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$, $q \in \{\pm1, \pm2)$; zatem $\frac{p}{q} \in \left\{\pm1, \pm 3, \pm 5, \frac{\pm3}{2}, \frac{\pm5}{2}\right\}$. Obliczamy kolejno $W(1) = -16 \neq 0$, $W(-1) = 36 \neq 0$, $W(-3) = 0$, $W(5) = 0$, $W\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Wielomian ma trzy pierwiastki wymierne: $x_1 = -3, x_2 = 5, x_3 = \frac{1}{2}$. Innych pierwiastków wielomian $W(x)$ nie ma.

Zadanie 10. $|CP| : |PD| = 5 : 2$

Rozwiązanie:



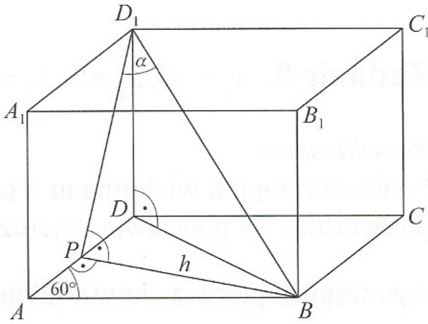
Prowadzimy odcinek DE równoległy do środkowej AS taki, że $E \in BC$. Niech P oznacza punkt przecięcia odcinka CD ze środkową AS. Z twierdzenia Talesa – dla kąta BCD i prostych równoległych PS i DE – otrzymujemy $\frac{|CP|}{|PD|} = \frac{|CS|}{|SE|}$; podobnie dla kąta ABS mamy $\frac{|BS|}{|ES|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{5}{2}$. Ale $|CS| = |BS|$, więc $\frac{|CS|}{|ES|} = \frac{5}{2}$, skąd $\frac{|CP|}{|PD|} = \frac{5}{2}$.

Zadanie 11. $k = \frac{1}{3}$; $S(-5, 4)$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy środek i promień okręgu o_2: $O_2(-1, 2)$, $r_2 = 2$; następnie wyznaczamy środek i promień okręgu o_1, sprowadzając równanie okręgu do postaci kanonicznej:
$(x^2 - 14x + 49) - 49 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 17 = 0$, skąd $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 36$, więc $O_1(7, -2)$, $r_1 = 6$. Skala k jest dodatnia, wobec tego $k = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Następnie wyznaczamy współrzędne punktu $S(x_s, y_s)$, korzystając z definicji jednokładności i praw działań na wektorach: $\overrightarrow{SO_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SO_1}$, gdzie $\overrightarrow{SO_2} = [-1 - x_s, 2 - y_s]$ oraz $\overrightarrow{SO_1} = [7 - x_s, -2 - y_s]$. Wówczas $-1 - x_s = \frac{1}{3} \cdot (7 - x_s)$, skąd $x_s = -5$. Podobnie $2 - y_s = \frac{1}{3} \cdot (-2 - y_s)$, skąd $y_s = 4$; $S(-5, 4)$.

Zadanie 12. a) 10; b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Rozwiązanie:



Niech a oznacza długość boku rombu w podstawie. Wówczas objętość graniastosłupa jest równa $V = a^2 \cdot \sin 60° \cdot 6 = 192\sqrt{3}$, skąd $a = 8$. Ponieważ $|BD| = a = 8$, więc z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym DBD_1 obliczamy długość przekątnej BD_1 graniastosłupa: $d^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, czyli $d = 10$. Aby wyznaczyć kąt nachylenia przekątnej BD_1 do ściany ADD_1A_1, należy znaleźć rzut prostokątny punktu B na tę ścianę; jest nim spodek P wysokości h trójkąta ABD poprowadzonej z punktu B. Szukanym kątem jest kąt PD_1B; oznaczmy go α. Trójkąt ABD jest równoboczny, więc $h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Mamy $\sin\alpha = \frac{h}{|BD_1|}$, skąd $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Zadanie 13. $\frac{2}{165}$

Rozwiązanie:
Mamy: Ω – zbiór wszystkich możliwych ustawień 15 modeli samochodów na trzech półkach; $\overline{\overline{\Omega}} = 15!$ Oznaczmy zdarzenia: A – wszystkie modele fordów będą stały obok siebie na pierwszej półce; B – wszystkie modele fiatów zostały ustawione na jednej półce obok siebie. Szukamy $P(A \mid B)$. Wyznaczamy najpierw $P(B)$. Półkę dla modeli fiata wybieramy na 3 sposoby, następnie na dwa sposoby wybieramy miejsce dla grupy 4 modeli fiatów, które możemy przestawiać między sobą na 4! sposobów. Pozostałe modele mogą być ustawione losowo na

11 pozostałych miejscach, czyli na 11! sposobów. Otrzymujemy $\overline{\overline{B}} = 3 \cdot 2 \cdot 4! \cdot 11!$, więc $P(B) = \frac{6 \cdot 4! \cdot 11!}{15!}$. Zdarzenie $A \cap B$ oznacza, że na pierwszej półce stoją obok siebie trzy modele fordów, na jednej z dwóch pozostałych półek stoją obok siebie 4 modele fiatów oraz pozostałe modele stoją na ośmiu pozostałych miejscach w dowolny sposób losowy. Modele fordów można ustawić na $3 \cdot 3!$ sposobów (3 – liczba ustawień grupy trzech fordów na pięciu miejscach w jednym szeregu; 3! – liczba możliwych przestawień trzech fordów między sobą). Jednocześnie modele fiatów można ustawić na $2 \cdot 2 \cdot 4!$ (2 – liczba wyborów półki dla fiatów; 2 – liczba wyboru miejsca dla grupy 4 fiatów na wybranej półce; 4! – liczba możliwych przestawień 4 fiatów między sobą). Pozostałe modele można ustawić na pozostałych ośmiu miejscach na 8! sposobów. Zatem $\overline{\overline{A \cap B}} = 3 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4! \cdot 8!$, skąd $P(A \cap B) = \frac{12 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 8!}{15!}$.

Stosujemy wzór $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ i otrzymujemy: $P(A \mid B) = \frac{12 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 8!}{6 \cdot 4! \cdot 11!} = \frac{2}{165}$.

Zadanie 14.

Rozwiązanie:

Z założenia $a^2 - b^2 = 4$ oraz z twierdzenia sinusów otrzymujemy $4R^2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) = 4$, gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie ABC. Ponadto $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, więc $R = \frac{c}{2\sin\gamma}$, czyli $R = 6$. Zatem otrzymaną równość zapisujemy w postaci $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1}{36}$. Następnie wyrażenie $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$ doprowadzamy do postaci iloczynowej:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = (\sin\alpha - \sin\beta) \cdot (\sin\alpha + \sin\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= \left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin(\alpha-\beta) \cdot \sin(\alpha+\beta).$$ Z założenia:

$\alpha + \beta = \pi - \gamma$, więc $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\pi-\gamma) = \sin\gamma$. Otrzymujemy $\sin(\alpha-\beta) \cdot \sin\gamma = \frac{1}{36}$ i $\sin\gamma = \frac{1}{4}$, skąd $\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{9}$, co kończy dowód.

Zadanie 15. 2053 liczby

Rozwiązanie:

Pamiętamy, że 0 nie może być początkową cyfrą liczby. Mamy sześć przypadków. W zapisie liczby występuje:

1) ósemka i dziewiętnaście zer; jest jedna taka liczba;
2) piątka, trójka i osiemnaście zer; takich liczb mamy $2 \cdot 19 = 38$;
3) dwie czwórki i osiemnaście zer; takich liczb jest 19;
4) czwórka, dwie dwójki i siedemnaście zer; mamy $\binom{19}{2} + 19 \cdot 18$, czyli 513 takich liczb;

5) dwójka, dwie trójki i siedemnaście zer – analogicznie jak w 3) mamy 513 liczb;

6) cztery dwójki i szesnaście zer; mamy $\binom{19}{3}$, czyli 969 takich liczb.

Obliczamy liczbę wszystkich liczb spełniających warunki zadania:

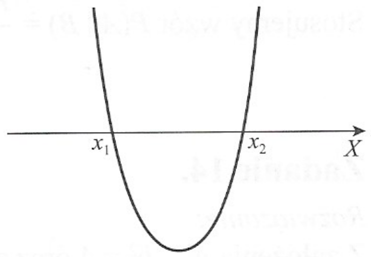
$1 + 38 + 19 + 2 \cdot 513 + 969 = 2053$.

Zadanie 16. $a = 8$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 6x^2 - 30ax + 24a^2$, $x \in \mathbf{R}$; następnie wyznaczamy jej miejsca zerowe: $\sqrt{\Delta} = 18|a|$, $a \neq 0$; $x_1 = \dfrac{5a - 3|a|}{2}$, $x_2 = \dfrac{5a + 3|a|}{2}$; zauważamy, że $x_1 < x_2$.

Na podstawie szkicu wykresu pochodnej stwierdzamy, że dla argumentu $x_1 = \dfrac{5a - 3|a|}{2}$ funkcja f ma maksimum, zaś dla argumentu $x_2 = \dfrac{5a + 3|a|}{2}$ funkcja f ma minimum.



Zatem musi być spełniony warunek $\left(\dfrac{5a - 3|a|}{2}\right)^2 = 2 \cdot \dfrac{5a + 3|a|}{2}$,

czyli $34a^2 - 30|a| \cdot a = 20a + 12|a|$, $a \neq 0$. Rozwiązujemy równanie, rozpatrując dwa przypadki.

1) Jeśli $a > 0$, to mamy $4a^2 - 32a = 0$, skąd $a = 8$;
2) jeśli $a < 0$, to otrzymujemy równanie $64a^2 - 8a = 0$, które jest sprzeczne z danym założeniem. Zatem $a = 8$.