EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI

Arkusz próbny nr 5
POZIOM ROZSZERZONY

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–18).
2. Rozwiązania zadań wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Czas pracy:
180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

Zadanie 1. (0–1)

Prosta o równaniu $y = ax - 4$ jest styczna do okręgu $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. Współczynnik kierunkowy prostej jest równy:

A. $1\frac{3}{5}$ B. $1\frac{1}{6}$ C. $1\frac{1}{3}$ D. $1\frac{2}{3}$

Zadanie 2. (0–1)

Grupa dziewięciu harcerek i dziewięciu harcerzy ustawia się w dwuszeregu (harcerki w pierwszym, a harcerze w drugim rzędzie). Liczba wszystkich możliwych takich ustawień jest równa:

A. $(9!)^2$ B. $2 \cdot 9!$ C. $\binom{18}{2}$ D. 2^9

Zadanie 3. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{5} \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa:

A. 14 B. $13\frac{2}{3}$ C. $13\frac{1}{3}$ D. 13

Zadanie 4. (0–1)

Wartość wyrażenia $\dfrac{x^4 - 8x}{3x^2 + 6x + 12}$, dla $x = 3\sqrt{5} + 2$, jest równa:

A. $45 + 6\sqrt{5}$ B. $10 + 6\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $15 + 2\sqrt{5}$

Zadanie 5. (0–1)

Niech a oznacza liczbę rozwiązań równania $9^x + 7 \cdot 3^x - 18 = 0$. Zatem:

A. $a = 0$ B. $a = 1$ C. $a = 2$ D. $a = 3$

Zadanie 6. (0–2)

Funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = 0{,}5x^2 + 5x - 1$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$. Zakoduj kwadrat otrzymanego wyniku, podając cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 7. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{288 \cdot \binom{2n}{4}}{0{,}5n^4 + 9n^2 + 5}$. Wynik zakoduj, podając cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 8. (0–2)

Iloraz pola powierzchni bocznej stożka do pola jego powierzchni całkowitej jest równy $\frac{5}{6}$.

Oblicz cosinus kąta rozwarcia tego stożka. Zakoduj wynik, podając cyfrę jedności i dwie kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 9. (0–2)

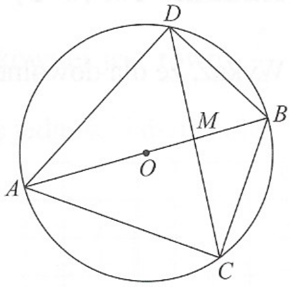
Ze zbioru $\{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$ losujemy kolejno, bez zwracania, dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wylosowanych liczb jest większa od 6, pod warunkiem, że liczba wylosowana za pierwszym razem jest liczbą pierwszą.

Zadanie 10. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$.

Zadanie 11. (0–3)

W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę CD, która przecięła średnicę AB w punkcie M, dzieląc ją na odcinki AM i MB, gdzie $|AM| = 9$, $|MB| = 4$. Wiedząc, że punkt M jest środkiem cięciwy CD, oblicz pole czworokąta $ACBD$.

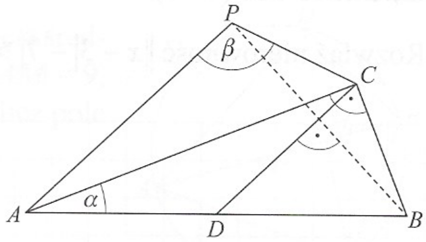


Zadanie 12. (0–3)

Rozwiąż nierówność $\left||x-3|-7\right| > 5$.

Zadanie 13. (0–3)

W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest środkiem przeciwprostokątnej AB oraz $|\sphericalangle A| = \alpha$. Punkt P jest obrazem punktu B w symetrii osiowej względem prostej CD oraz $|\sphericalangle APC| = \beta$ (zobacz rysunek obok). Wykaż, że jeśli $\alpha = 28°$, to $\beta = 118°$.



Zadanie 14. (0–4)

Właściciel posesji zlecił robotnikowi wykwalifikowanemu i jego pomocnikowi pracę brukarską. Gdyby każdy z pracowników wykonywał tę pracę samodzielnie, to pomocnik wykonywałby ją o 8 godzin dłużej niż robotnik. Robotnik wraz z pomocnikiem pracowali wspólnie przez 3 godziny. Następnie resztę pracy wykonał samodzielnie robotnik w ciągu 7 godzin i 12 minut. Ile godzin potrzebowałby robotnik, a ile jego pomocnik, aby zleconą pracę wykonać samodzielnie? W ciągu ilu godzin wykonaliby tę pracę, gdyby od początku do końca pracowali razem?

Zadanie 15. (0–4)

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych AB i BC, gdzie $|AB| = 5$ cm i $|BC| = 12$ cm. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 30°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły.

Zadanie 16. (0–5)

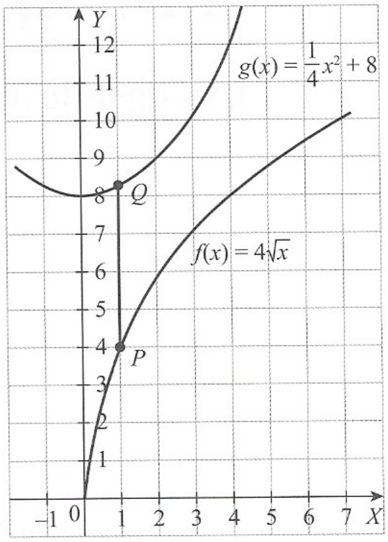
Do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x - 2$ poprowadzono styczną k w punkcie M o odciętej $x = -2$. Prosta k przecięła wykres funkcji f w punkcie A, $A \neq M$. Wyznacz współrzędne punktu A.

Zadanie 17. (0–5)

W trójkącie ABC miara kąta przy wierzchołku B jest o $90°$ większa od miary kąta przy wierzchołku A. Oblicz miary kątów tego trójkąta, jeśli wiadomo, że $\frac{|AC|}{|AB|} = \sqrt{3}$.

Zadanie 18. (0–7)

Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi OY, których jeden koniec należy do wykresu funkcji $f(x) = 4\sqrt{x}$, gdzie $x > 0$, a drugi koniec leży na paraboli o równaniu $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 8$ (zobacz rysunek obok). Wykaż, że najkrótszy z tych odcinków ma długość $8 - 3\sqrt[3]{4}$.



BRUDNOPIS