

## Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi  
 – s. 183  
 modele  
 – s. 184

**Zadanie 1.** (6 pkt)

Dany jest ciąg  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n - 1)$ .

- Uzasadnij, że  $(a_n)$  nie jest ciągiem arytmetycznym.
- Oblicz sumę stu jeden początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 2.** (5 pkt)

Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa  $-\frac{7}{4}n + \frac{1}{4}n^2$  dla  $n \geq 1$ . Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.

**Zadanie 3.** (5 pkt)

Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$  liczby  $\log_2 x$ ,  $\log_m x$ ,  $\log_4 x$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz  $m$ .

**Zadanie 4.** (4 pkt)

Rozwiąż równanie  $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{2x-1} = 64 \cdot 4^{x+1}$ .

**Zadanie 5.** (5 pkt)

Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego  $(a_n)$  jest równa 4, a suma dziesięciu początkowych jego wyrazów wynosi 132. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

**Zadanie 6.** (5 pkt)

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego  $(a_n)$  jest równy 2. Ciąg  $(b_n)$  dany jest wzorem  $b_n = \log_2 a_n$ . Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu  $(b_n)$  wynosi  $-35$ . Oblicz iloraz  $q$  ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 7.** (6 pkt)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny  $(a_n)$ .

- Uzasadnij, że ciąg  $b_n = \frac{1}{a_n}$  także jest ciągiem geometrycznym.
- Wiedząc, że suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest równa 124, a suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu  $(b_n)$  wynosi 31, oblicz iloczyn dwudziestu początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 8.** (4 pkt)

Dany jest ciąg  $(a_n)$ , dla którego  $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 105$ . Ciąg  $(b_n)$  dany wzorem  $b_n = 2^{a_n}$  jest geometryczny. Oblicz ósmy wyraz ciągu  $(b_n)$ .

**Zadanie 9.** (3 pkt) CKE 2015

Niech  $P_n$  oznacza pole koła o promieniu  $\frac{1}{2^n}$ , dla  $n \geq 1$ . Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu  $(P_n)$ .

**Zadanie 10.** (4 pkt)

Pierwszy, czwarty i dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy  $r \neq 0$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

**Zadanie 11.** (4 pkt)

Liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  tworzą rosnący ciąg geometryczny. Liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c - 3$  tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , jeżeli wiadomo, że  $a \cdot c = 324$ .

**Zadanie 12.** (5 pkt) CKE

O liczbach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  wiemy, że ciąg  $(a, b, c)$  jest arytmetyczny i  $a + c = 10$ , zaś ciąg  $(a + 1, b + 4, c + 19)$  jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

**Zadanie 13.** (4 pkt)

Dana jest funkcja  $f(x) = -2x + 4$ . Uzasadnij, że jeśli  $(x_n)$  jest ciągiem arytmetycznym, to  $y_n = f(x_n)$  także nim jest.

**Zadanie 14.** (3 pkt)

Wykaż, że jeśli liczby  $a - b$ ,  $ab$  i  $c - a$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to liczby  $2a^2$ ,  $c - b$  i  $2b^2$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

**Zadanie 15.** (5 pkt)

Suma sześciu początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego  $(a_n)$  jest 72 razy większa od sumy trzech następnych jego wyrazów. Wyznacz wzór ogólny ciągu, jeżeli iloczyn wyrazów drugiego i czwartego jest równy 4.

**Zadanie 16.** (6 pkt)

Ciąg  $(a_n)$  jest dany wzorem rekurencyjnym  $a_1 = -1$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}$  dla  $n \geq 1$ . Dziewiąty i dwudziesty piąty wyraz tego ciągu są pierwiastkami wielomianu  $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ . Wyznacz argumenty, dla których wielomian  $w$  przyjmuje wartości nieujemne.

**Zadanie 17.** (5 pkt)

Rozwiąż nierówność, jeżeli jej lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\frac{2x}{3x-1} + \frac{6x}{3x-1} + \dots + \frac{98x}{3x-1} \geq 625$$

**Zadanie 18.** (5 pkt)

Liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  i  $f$  tworzą ciąg geometryczny.

- Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $w(x) = ax^5 - bx^4 - 2cx^3 + 2dx^2 + ex - f$  dla  $a \neq 0$ .
- Rozwiąż nierówność  $w(x) \geq 0$  dla  $a = -1$  i ilorazu 2.

**Zadanie 19.** (4 pkt)

Rozwiąż równanie  $||x - a| - b| = 2$ , gdzie  $a$  jest czwartym, a  $b$  – piątym wyrazem ciągu określonego rekurencyjnie  $a_1 = -5$ ,  $a_n = a_{n-1} + 2$ .

**Zadanie 20.** (2 pkt) CKE 2015

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444} \right)$ .

**Zadanie 21.** (3 pkt)

Dane są ciągi  $a_n = \frac{6n^3 + 5n - 7}{(1-n)^3}$  oraz  $b_n = \frac{\sqrt[3]{27n^3 - 1}}{n-1}$ . Oblicz granicę ciągu  $c_n = (3b_n - a_n)^2$ .

**Zadanie 22.** (7 pkt)

Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym  $a_n = \left( \frac{p}{1-p} \right)^{2n+1}$ .

- Uzasadnij, że dla każdego  $p \neq 1$  ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu  $(a_n)$ .
- Wyznacz wartości parametru  $p$ , dla których szereg  $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$  jest zbieżny, i oblicz sumę tego szeregu. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

**Zadanie 23.** (6 pkt)

Wyznacz wartości parametru  $p$ , dla których szereg geometryczny:

$$(p^3 + 3p^2 - 3p - 9) + (p + 3) + \dots$$

jest zbieżny. Oblicz sumę tego szeregu.

**Zadanie 24.** (5 pkt)

Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego  $(a_n)$ , którego wyrazy spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 57 \\ a_2 + a_5 + a_8 + \dots = 18 \end{cases}$$

**Zadanie 25.** (4 pkt)

Oblicz  $f(k)$ , gdzie  $k$  jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią należącą do dziedziny funkcji:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{16}{(x-1)^4} + \dots$$

**Zadanie 26.** (6 pkt)

Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $1 + 2 \cos^2 x + 4 \cos^4 x + \dots = m$  ma rozwiązania?

**Zadanie 27.** (5 pkt)

Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego  $(a_n)$ , jeżeli suma wszystkich jego wyrazów jest równa  $\sqrt{15}$ , a suma kwadratów jego wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy ich czwartych potęg.

**Zadanie 28.** (4 pkt)

Rozwiąż nierówność  $2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \dots < -4x + 8$ .