Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. a)	Obliczenie: $a_1 = 1$, $a_2 = -3$, $a_3 = 5$
	Sprawdzenie, że $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ i zapisanie wniosku: Ciąg (a_n) nie jest arytmetyczny.
1. b)	Zauważenie, że wyrazy ciągu (a_n) o numerach nieparzystych tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 1 i różnicy 4, oraz obliczenie sumy 51 początkowych wyrazów tego ciągu: $S' = 5151$
	Zauważenie, że wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie -3 i różnicy -4, oraz obliczenie sumy 50 początkowych wyrazów tego ciągu: $S'' = -5050$
	Obliczenie sumy 101 początkowych wyrazów ciągu (a_n): $S_{101} = 101$
2.	Obliczenie $a_1 = -\frac{3}{2}$ i zapisanie zależności $a_n = S_n - S_{n-1}$, dla $n \geqslant 2$
	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (a_n): $a_n = \frac{n}{2} - 2$
	Zauważenie, że wyrazy ciągu (a_n) o numerach nieparzystych tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym $-\frac{3}{2}$ i różnicy 1
	Obliczenie dwudziestego wyrazu tego ciągu: $a_{39} = \frac{35}{2}$
	Obliczenie sumy: $S = 160$
3.	Zapisanie założenia: $m \in (0;1) \cup (1;\infty)$ oraz warunku: $\log_m x - \log_2 x = \log_4 x - \log_m x$
	Przekształcenie warunku do postaci: $2\log_m x = \frac{3}{2}\log_2 x$
	Przekształcenie warunku do postaci: $4\log_x 2 = 3\log_x m$
	Zapisanie równania: $\log_x 16 = \log_x m^3$
	Obliczenie m: $m = 2\sqrt[3]{2}$
4.	Przekształcenie lewej strony równania do postaci $2^{1+3+5+\ldots+(2x-1)}$ i zauważenie, że wykładnik jest sumą x kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, $x > 0$
	Obliczenie sumy $1 + 3 + 5 + \ldots + (2x - 1)$: x^2

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4. cd.	Zapisanie prawej strony równania w postaci: 2^{2x+8}
	Rozwiązanie równania $x^2=2x+8$: $x=-2$ lub $x=4$ i podanie odpowiedzi: $x=4$
5.	Zapisanie warunków: $a_1\frac{1-q^5}{1-q}=4$ i $a_1\frac{1-q^{10}}{1-q}=132$
	Przekształcenie warunków do postaci: $\frac{a_1}{1-q}=\frac{4}{1-q^5}$ i $\frac{a_1}{1-q}=\frac{132}{1-q^{10}}$ i zapisanie równania: $4(1-q^{10})=132(1-q^5)$
	Rozwiązanie równania: $q=2$
	Obliczenie a_1: $a_1=\frac{4}{31}$
	Obliczenie sumy S_{15}: $S_{15}=4228$
6.	Zapisanie wzoru ogólnego ciągu (a_n): $a_n=2q^{n-1}$, $q>0$
	Zapisanie sumy $S=b_1+\ldots+b_{10}$ w postaci: $\log_2(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{10})=\log_2\left(2^{10}q^{1+2+\ldots+9}\right)$
	Obliczenie sumy $1+2+3+\ldots+9=45$ i zapisanie sumy S w postaci: $S=\log_2\left(2^{10}q^{45}\right)$
	Zapisanie równania $\log_2\left(2^{10}q^{45}\right)=-35$ w postaci: $10+45\log_2 q=-35$
	Obliczenie ilorazu: $q=\frac{1}{2}$
7. a)	Zapisanie ilorazu $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ w postaci $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (a_n)
	Sformułowanie wniosku: (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{q}$.
7. b)	Zapisanie warunku $\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1-\frac{1}{q^{20}}}{1-\frac{1}{q}}=31$ i przekształcenie go do postaci: $31a_1q^{19}=\frac{1-q^{20}}{1-q}$
	Wykorzystanie równości $a_1\frac{1-q^{20}}{1-q}=124$ i zapisanie warunku w postaci: $a_1^2q^{19}=4$
	Zapisanie iloczynu $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{20}$ w postaci: $\left(a_1^2q^{19}\right)^{10}$
	Obliczenie wartości iloczynu $a_1\cdot\ldots\cdot a_{20}$: 4^{10}
8.	Wykorzystanie sumy $a_1+a_2+\ldots+a_{15}$ do obliczenia wartości iloczynu: $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{15}=2^{a_1}\cdot 2^{a_2}\cdot\ldots\cdot 2^{a_{15}}=2^{105}$
	Zapisanie iloczynu wyrazów ciągu (b_n) w postaci: $b_1\cdot b_1\cdot q\cdot b_1\cdot q^2\cdot\ldots\cdot b_1\cdot q^{14}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (b_n). Przekształcenie tego iloczynu do postaci: $b_1^{15}q^{1+2+\ldots+14}$
	Przekształcenie iloczynu do postaci: $b_1^{15}q^{105}$ i zapisanie równania: $b_1^{15}q^{105}=2^{105}$
	Obliczenie ósmego wyrazu ciągu (b_n): $b_8=b_1q^7=2^7$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9.	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu: $P_n = \pi\frac{1}{4^n}$ i zauważenie, że jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $P_1 = \frac{\pi}{4}$ i ilorazie $q = \frac{1}{4}$
	Zauważenie, że $\lvert q \rvert < 1$ i obliczenie sumy wszystkich wyrazów ciągu: $S = \frac{P_1}{1-q} = \frac{\pi}{4} : \frac{3}{4} = \frac{\pi}{3}$
10.	Wprowadzenie oznaczeń: (a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r i zapisanie ilorazu ciągu geometrycznego w postaci: $q = \frac{a_1+3r}{a_1} = \frac{a_1+19r}{a_1+3r}$
	Przekształcenie równania do postaci: $r(9r - 13a_1) = 0$
	Rozwiązanie równania: $r = 0$ lub $r = \frac{13}{9}a_1$ i odrzucenie pierwszego rozwiązania
	Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego: $q = \frac{16}{3}$
11.	Zapisanie równania dla ciągu geometrycznego: $b^2 = ac$ i arytmetycznego: $2b = a + c - 3$
	Obliczenie b z uwzględnieniem monotoniczności ciągu geometrycznego: $b = 18$
	Zapisanie układu równań: $a + c = 39$ i $ac = 324$ oraz wyprowadzenie równania: $a^2 - 39a + 324 = 0$
	Podanie rozwiązania układu równań: $a = 12$, $c = 27$ lub $a = 27$, $c = 12$ i wybór prawidłowej odpowiedzi: $a = 12$, $b = 18$, $c = 27$
12.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 2b = a + c \\ (b+4)^2 = (a+1)(c+19) \end{cases}$
	Obliczenie b: $b = 5$ i zapisanie układu równań: $\begin{cases} a + c = 10 \\ (a+1)(c+19) = 81 \end{cases}$
	Wyprowadzenie równania: $c^2 + 8c - 128 = 0$
	Rozwiązanie równania: $c = 8$ lub $c = -16$
	Wyznaczenie szukanych liczb: $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$ lub $a = 26$, $b = 5$, $c = -16$
13.	Oznaczenie przez r różnicy ciągu (x_n) i zapisanie równania: $x_n - x_{n-1} = r$
	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (y_n): $y_n = -2x_n + 4$
	Obliczenie różnicy $y_n - y_{n-1}$: $y_n - y_{n-1} = -2r$
	Sformułowanie wniosku: (y_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $-2r$.
14.	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania: $2ab = c - b$
	Zastąpienie wyrazu $c - b$ ciągu geometrycznego iloczynem $2ab$
	Uzasadnienie, że liczby $2a^2$, $2ab$, $2b^2$ spełniają odpowiedni dla ciągu geometrycznego warunek, np. $(2ab)^2 = 2a^2 2b^2$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15.	Wprowadzenie odpowiednich oznaczeń: $a_n = a_1 q^{n-1}$ i zapisanie równania: $$a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = 72 a_7 \frac{1-q^3}{1-q}$$
	Przekształcenie równania do postaci: $72q^6 - q^3 - 1 = 0$
	Rozwiązanie równania: $q = \frac{1}{2}$ lub $q = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ i odrzucenie drugiego rozwiązania ze względu na monotoniczność ciągu
	Przekształcenie równania $a_2 a_4 = 4$ do postaci: $a_1^2 q^4 = 4$
	Obliczenie pierwszego wyrazu ciągu: $a_1 = 8$
	Zapisanie wzoru ogólnego ciągu (a_n): $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$
16.	Zauważenie, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}$, i zapisanie wzoru ogólnego ciągu: $a_n = -1 + \frac{1}{4}(n-1)$
	Obliczenie dziewiątego i dwudziestego piątego wyrazu ciągu: $a_9 = 1$, $a_{25} = 5$
	Zapisanie warunków $w(1) = 0$ i $w(5) = 0$ w postaci układu równań: $$\begin{cases} a + b = -6 \\ 5a + b = -26 \end{cases}$$
	Obliczenie współczynników wielomianu w: $a = -5$, $b = -1$
	Przekształcenie wielomianu do postaci: $w(x) = (x-1)(x+1)(x-5)$
	Rozwiązanie nierówności $w(x) \geqslant 0$: $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 5; \infty)$
17.	Wyznaczenie dziedziny nierówności: $x \neq \frac{1}{3}$ i różnicy ciągu arytmetycznego: $r = \frac{4x}{3x-1}$
	Wyznaczenie liczby składników sumy: $n = 25$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\frac{1250}{3x-1} \geqslant 625$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\frac{1-x}{3x-1} \geqslant 0$
	Rozwiązanie nierówności $(1-x)(3x-1) \geqslant 0$ i podanie odpowiedzi: $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right\rangle$
18. a)	Zapisanie wzoru wielomianu w postaci: $w(x) = ax^5 - aqx^4 - 2aq^2x^3 - 2aq^3x^2 + aq^4x - aq^5$, gdzie q jest ilorazem ciągu geometrycznego
	Przekształcenie wielomianu do postaci: $w(x) = a(x-q)(x^2-q^2)^2$
	Wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu: $x = -q$ lub $x = q$
18. b)	Wyznaczenie pierwiastków równania: $-(x-2)(x^2-4)^2 = 0$: $x = -2$ lub $x = 2$
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-\infty; 2\rangle$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
19.	Obliczenie a i b: $a = 1$, $b = 3$
	Zapisanie warunku: $\lvert x-1\rvert - 3 = 2$ lub $\lvert x-1\rvert - 3 = -2$
	Rozwiązanie równania $\lvert x-1\rvert - 3 = 2$: $x = -4$ lub $x = 6$
	Rozwiązanie równania $\lvert x-1\rvert - 3 = -2$: $x = 0$ lub $x = 2$ i podanie odpowiedzi
20.	Wyznaczenie różnicy ułamków: $\frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444} = \frac{438n^2-12n-8}{(n+2)(n+444)}$
	Obliczenie granicy: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{438n^2-12n-8}{(n+2)(n+444)} = 438$
21.	Obliczenie granicy ciągu a_n: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -6$
	Obliczenie granicy ciągu b_n: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$
	Obliczenie granicy ciągu c_n: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 225$
22. a)	Wyznaczenie a_{n+1}: $a_{n+1} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+3}$
	Wyznaczenie ilorazu q: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+3}}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+1}} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2$
	Sformułowanie wniosku: Dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ iloraz q jest stały, zatem (a_n) jest ciągiem geometrycznym.
22. b)	Zapisanie warunku zbieżności: $\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 < 1$
	Wyznaczenie wartości parametru p: $p \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$
	Zapisanie sumy S: $S = \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^3}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^2}$
	Uproszczenie wyniku: $S = \frac{p^3}{1-3p+2p^2}$
23.	Zapisanie warunku zbieżności: $\left\lvert \frac{p+3}{p^3+3p^2-3p-9} \right\rvert < 1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\left\lvert \frac{p+3}{(p+3)(p^2-3)} \right\rvert < 1$ i zapisanie założeń: $p \neq -3, p \neq -\sqrt{3}$ i $p \neq \sqrt{3}$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\lvert p^2-3\rvert > 1$
	Wyznaczenie wartości parametru p: $p \in (-\infty; -2) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (2; \infty)$
	Zapisanie sumy S: $S = \frac{p^3+3p^2-3p-9}{1-\frac{1}{p^2-3}}$
	Uproszczenie wyniku: $S = \frac{(p+3)(p^2-3)^2}{p^2-4}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
24.	Przekształcenie układu równań do postaci: $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 57 \\ \frac{a_1 q}{1-q^3} = 18 \end{cases}$ gdzie $\lvert q \rvert < 1$
	Kolejne przekształcenie układu: $\begin{cases} a_1 = 57(1-q) \\ a_1 = \frac{18(1-q)(1+q+q^2)}{q} \end{cases}$
	Kolejne przekształcenie układu i zapisanie równania kwadratowego: $6q^2 - 13q + 6 = 0$
	Rozwiązanie równania: $q = \frac{2}{3}$
	Obliczenie pierwszego wyrazu: $a_1 = 19$
25.	Zapisanie nierówności: $\left\lvert \frac{4}{(x-1)^2} \right\rvert < 1$, gdzie $x \neq 1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(x-1)^2 > 4$
	Zapisanie dziedziny funkcji: $D = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ oraz wyznaczenie k: $k = 4$
	Obliczenie $f(4)$: $f(4) = \frac{9}{5}$
26.	Zauważenie, że lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym, oraz zapisanie sumy szeregu: $S(x) = \frac{1}{1-2\cos^2 x}$
	Zbadanie warunku zbieżności szeregu: $\lvert 2\cos^2 x \rvert < 1$, czyli $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{C}$
	Zauważenie, że w wyznaczonym przedziale funkcja $2\cos^2 x$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle 0; 1)$
	Zauważenie, że funkcja $1 - 2\cos^2 x$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(0; 1\rangle$
	Sformułowanie wniosku: Funkcja $\frac{1}{1-2\cos^2 x}$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle 1; \infty)$.
	Podanie odpowiedzi: $m \in \langle 1; \infty)$
27.	Zapisanie równania: $\frac{3a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^4}{1-q^4}$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = \sqrt{15} \\ \frac{3a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^4}{1-q^4} \end{cases}$ gdzie $\lvert q \rvert < 1$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
27. cd.	Przekształcenie układu: $$\begin{cases} a_1 = \sqrt{15}(1-q) \\ a_1^2 = 3(1+q^2) \end{cases}$$
	Kolejne przekształcenie układu i zapisanie równania kwadratowego: $2q^2 - 5q + 2 = 0$
	Obliczenie ilorazu ciągu (a_n): $q = \frac{1}{2}$
28.	Zauważenie, że lewa strona nierówności jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie 2 i ilorazie $\frac{x}{2}$, oraz zapisanie sumy szeregu: $S(x) = \frac{2}{1-\frac{x}{2}}$
	Zbadanie warunku zbieżności szeregu: $\left\|\frac{x}{2}\right\| < 1$, czyli $x \in (-2;2)$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-2;1)$