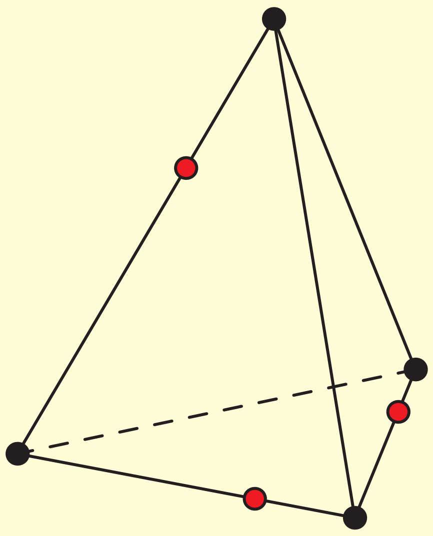
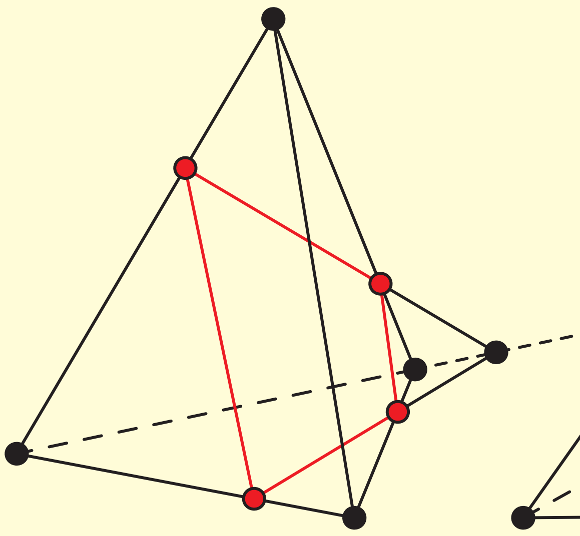
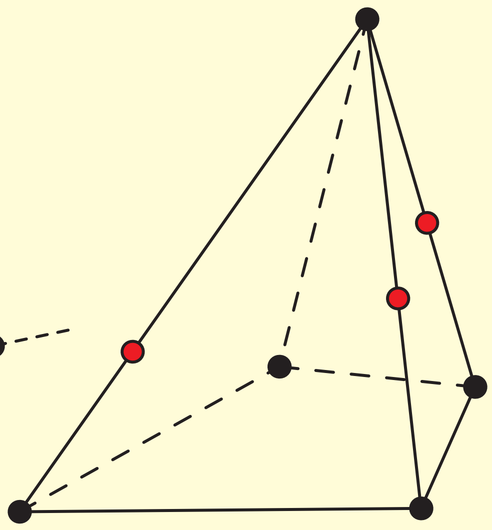
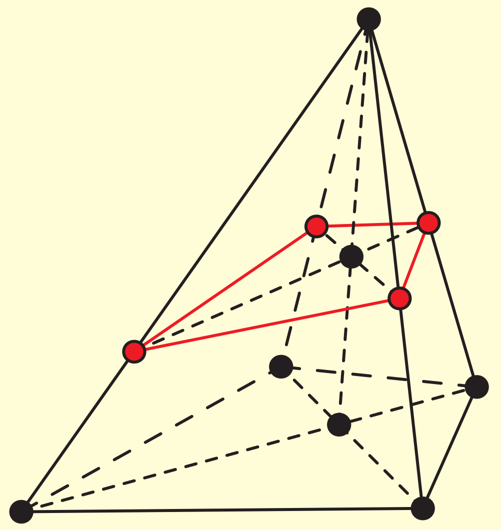
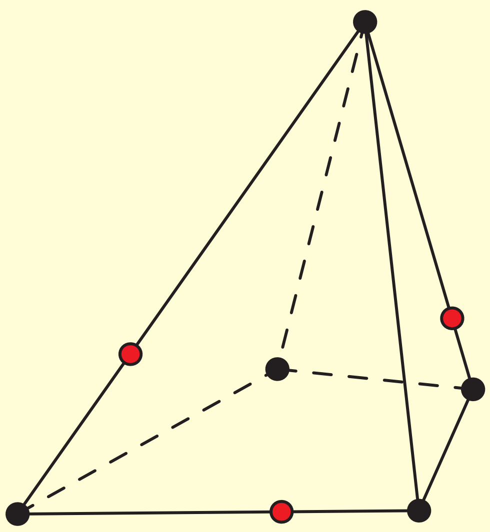
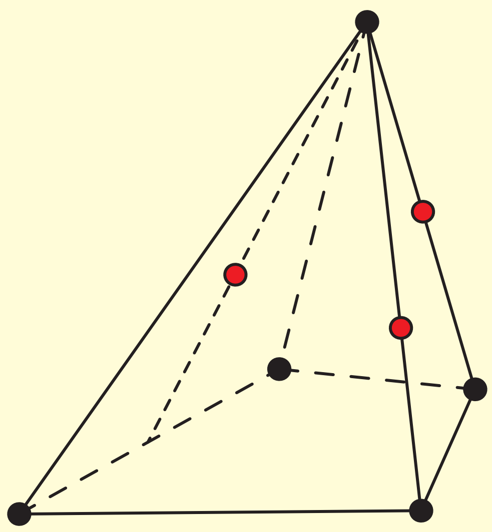
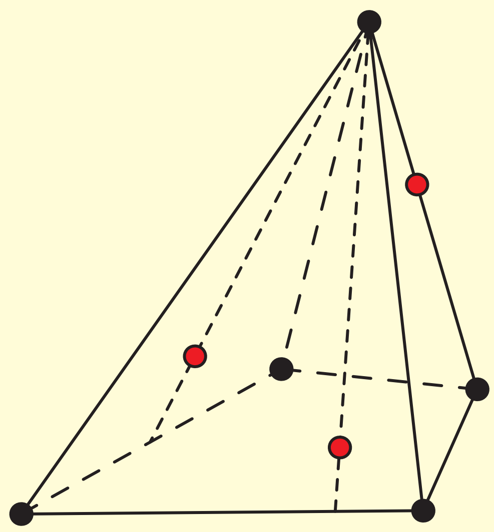
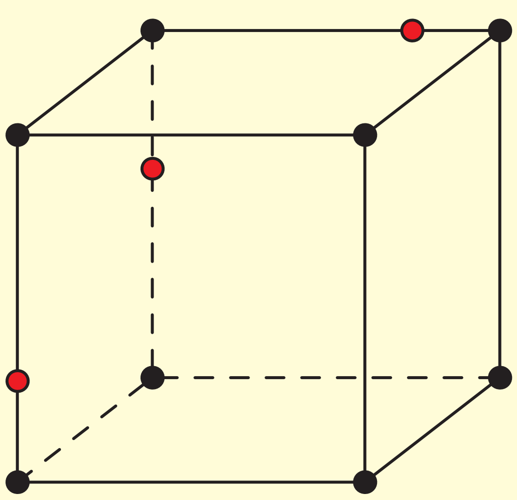
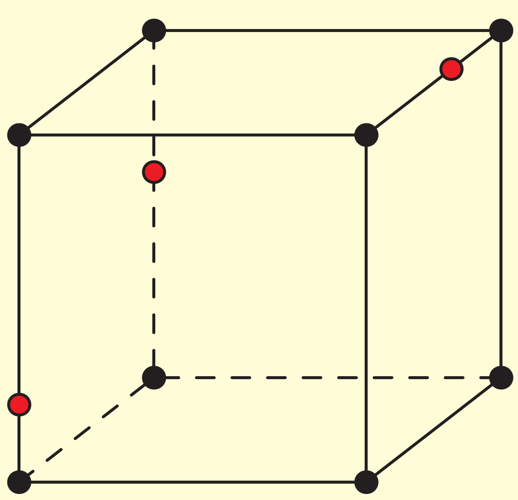
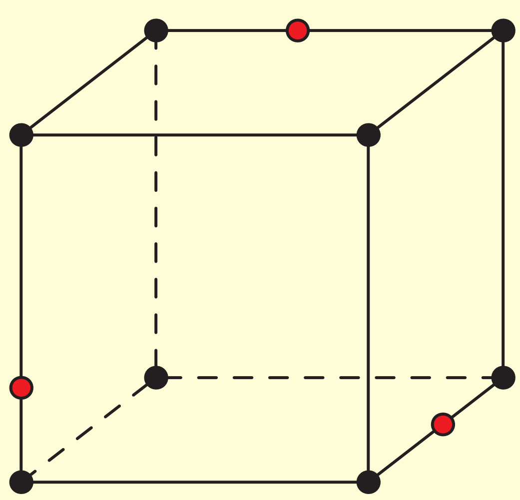
Wyznacz przekrój

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl

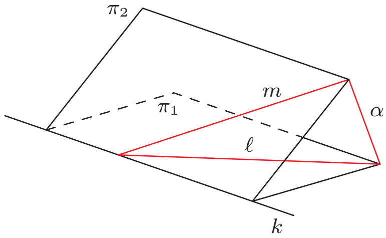











Wyznacz przekrój

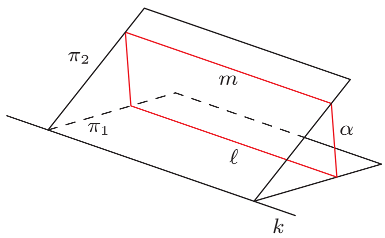
Michał Kieza

Na rysunkach przedstawionych na plakacie należy znaleźć przekrój wielościanu płaszczyzną przechodzącą przez trzy dane punkty. Przydadzą się do tego następujące proste obserwacje:

1. Dwie płaszczyzny, które nie są równoległe, przecinają się wzdłuż prostej.
2. Jeśli dwa punkty należą do pewnej płaszczyzny, to prosta przechodząca przez te punkty też jest zawarta w tej płaszczyźnie.
3. Dane są dwie płaszczyzny π_1 i π_2, które przecinają się wzdłuż prostej k. Załóżmy, że płaszczyzna α, która nie jest równoległa do prostej k, przecina płaszczyznę π_1 wzdłuż prostej ℓ, a płaszczyznę π_2 wzdłuż prostej m. Wówczas proste ℓ i m przecinają się na prostej k (rys. 1).



rys. 1



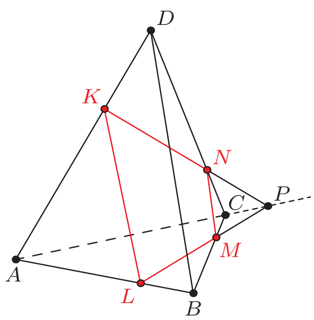
rys. 2

4. Dane są dwie płaszczyzny π_1 i π_2, które przecinają się wzdłuż prostej k. Załóżmy, że płaszczyzna α, równoległa do prostej k, przecina płaszczyznę π_1 wzdłuż prostej ℓ, a płaszczyznę π_2 wzdłuż prostej m. Wówczas proste ℓ i m są równoległe do prostej k (rys. 2).
5. Płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe. Płaszczyzna α przecina te dwie płaszczyzny odpowiednio wzdłuż prostych ℓ i m. Wtedy proste ℓ i m są równoległe.

Teraz możemy przejść do rozwiązań przykładów z plakatu. Na wstępie od razu zaznaczmy, że końcowy wynik może zależeć od dokładnego położenia danych trzech punktów i przy ich nieznacznej zmianie rozumowanie może wymagać modyfikacji (zachęcamy Czytelników do zastanowienia się nad tym w każdym z przypadków). Tutaj ograniczymy się jedynie do przeanalizowania przykładów dla takich położeń punktów, jak na plakacie.

Przykład 1.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Niech P będzie punktem przecięcia prostej LM z prostą AC. Wówczas punkt P należy do płaszczyzny KLM, zatem leży w niej także prosta PK. Niech N będzie punktem przecięcia prostych CD i PK. Wtedy czworokąt $KLMN$ jest szukanym przekrojem czworościanu $ABCD$.



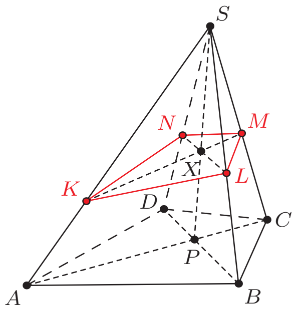
rys. 3

Przykład 2.

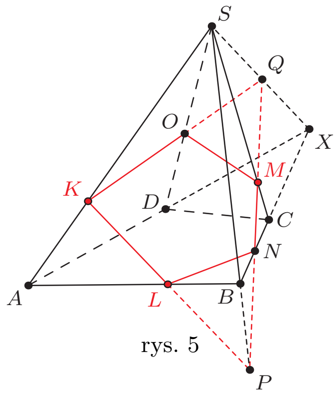
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$. Niech ponadto X będzie punktem przecięcia prostej SP z odcinkiem KM (punkt X istnieje, gdyż prosta SP leży w płaszczyźnie ACS). Wtedy punkt X należy do płaszczyzn KLM i BDS. Punkt N przecięcia prostej LX z krawędzią DS należy więc do płaszczyzny KLM. Czworokąt $KLMN$ jest zatem szukanym przekrojem danego ostrosłupa.

Uwaga.

Punkt N przecięcia płaszczyzny KLM z krawędzią DS można wyznaczyć też w inny sposób. Załóżmy, że płaszczyzny ABS i CDS przecinają się wzdłuż prostej ℓ (jeśli proste AB i CD mają punkt wspólny E, to tą prostą jest prosta ES, w przeciwnym razie prosta ℓ jest do nich równoległa). Wówczas proste KL i MN przecinają się na prostej ℓ.



rys. 4



rys. 5

Przykład 3.

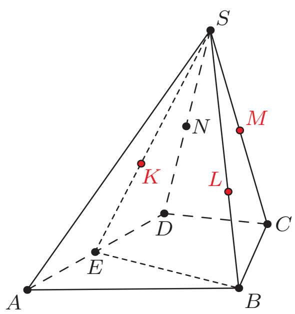
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 5. Niech P będzie punktem przecięcia prostych KL i BS. Wtedy punkt P należy do płaszczyzny KLM, a więc należy do niej też punkt N przecięcia prostej PM z krawędzią BC. Niech X będzie punktem przecięcia prostych BC i AD. Wtedy płaszczyzny BCS i ADS przecinają się wzdłuż prostej SX. Punkt Q przecięcia prostej MN z prostą SX należy do płaszczyzny KLM, więc należy do niej także punkt O przecięcia prostej KQ z krawędzią DS. Pięciokąt $KLNMO$ jest szukanym przekrojem.

Przykład 4.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 6.

Sposób I

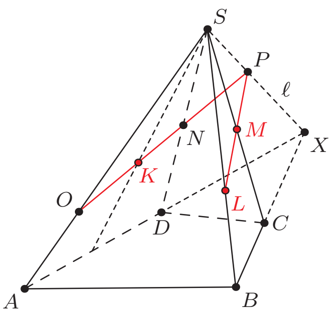
Niech E będzie punktem przecięcia prostej SK z krawędzią AD. Wtedy, stosując rozumowanie z przykładu 2 dla ostrosłupa $BCDES$, znajdziemy punkt N przecięcia płaszczyzny KLM z krawędzią DS, a następnie, stosując to samo rozumowanie dla ostrosłupa $ABCDS$, znajdziemy punkt O przecięcia danej płaszczyzny z krawędzią AS.



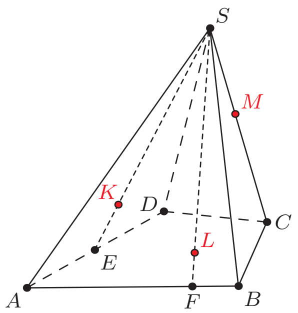
rys. 6

Sposób II

Niech prosta ℓ będzie częścią wspólną płaszczyzn BCS i ADS (rys. 7). Punkt P przecięcia prostej LM z prostą ℓ należy do płaszczyzny KLM, więc leży w niej także prosta PK. Niech N i O będą punktami przecięcia prostej PK odpowiednio z krawędziami DS i AS. Wtedy czworokąt $LMNO$ jest szukanym przekrojem.



rys. 7



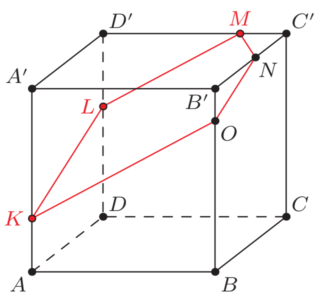
rys. 8

Przykład 5.

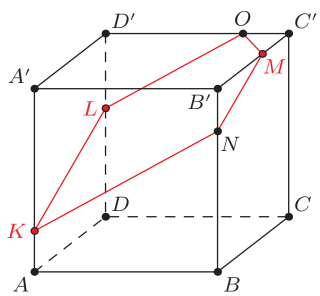
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 8. Niech E i F będą punktami przecięcia prostych SK i SL odpowiednio z krawędziami AD i AB. Wtedy, stosując rozumowanie z przykładu 2 dla ostrosłupa $CDEFS$, znajdziemy punkt przecięcia płaszczyzny KLM z krawędzią DS. Następnie, stosując to rozumowanie dla ostrosłupa $BCDES$, znajdziemy punkt przecięcia płaszczyzny KLM z krawędzią BS. Wreszcie, stosując to samo rozumowanie dla ostrosłupa $ABCDS$, znajdziemy punkt przecięcia płaszczyzny KLM z przedłużeniem krawędzi AS, co pozwoli na wyznaczenie punktów przecięcia tej płaszczyzny z krawędziami AB i AD.

Przykład 6.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 9. Płaszczyzna KLM przecina przeciwległe ściany sześcianu wzdłuż prostych równoległych (własność 5). Poprowadźmy przez punkt K prostą równoległą do prostej LM. Niech O będzie punktem przecięcia tej prostej z krawędzią BB'. Punkt O należy do płaszczyzny KLM (zgodnie z początkową obserwacją). Prosta równoległa do prostej KL przechodząca przez punkt O przecina krawędź $B'C'$ w punkcie N, należącym do płaszczyzny KLM. Pięciokąt $KLMNO$ jest szukanym przekrojem.



rys. 9



rys. 10

Przykład 7.

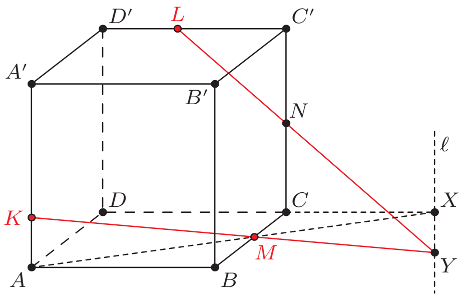
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 10. Tak jak w poprzednim przykładzie zauważamy, że płaszczyzna KLM przecina przeciwległe ściany sześcianu wzdłuż prostych równoległych. Zatem prosta przechodząca przez punkt M i równoległa do prostej KL przecina krawędź BB' w punkcie N należącym do płaszczyzny KLM. Prowadząc teraz przez punkt L prostą równoległą do prostej KN, otrzymujemy punkt O przecięcia jej z krawędzią $C'D'$. Pięciokąt $KLOMN$ jest szukanym przekrojem.

Przykład 8.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 11.

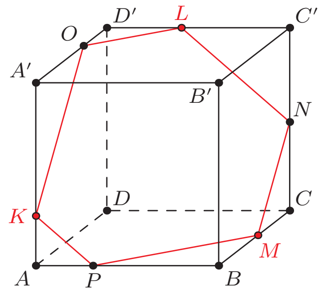
Sposób I

Rozpoczniemy od wyznaczenia punktu przecięcia prostej KM z płaszczyzną $CC'D'D$. Niech X będzie punktem przecięcia prostych AM i CD, a ℓ — prostą przechodzącą przez punkt X i równoległą do krawędzi AA'. Punkt X i prosta ℓ leżą w płaszczyźnie AKM. W takim razie proste KM i ℓ mają w przestrzeni punkt wspólny Y, który należy także do płaszczyzny $CC'D'D$ (bo prosta ℓ leży w tej płaszczyźnie) — jest więc szukanym punktem przecięcia prostej KM z płaszczyzną $CC'D'D$.

Niech N będzie punktem przecięcia prostej LY z krawędzią CC'. Wówczas punkt N należy do płaszczyzny KLM (bo Y do niej należy). Prowadząc przez punkt K prostą równoległą do prostej MN, otrzymujemy jej punkt przecięcia z krawędzią $A'D'$ — punkt O, a prowadząc przez punkt K prostą równoległą do prostej LN, otrzymujemy jej punkt przecięcia z krawędzią AB — punkt P. Sześciokąt $KOLNMP$ jest szukanym przekrojem (rys. 12).



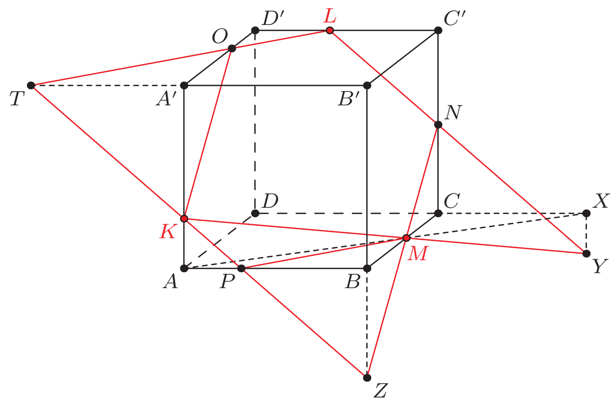
rys. 11



rys. 12

Sposób II

Punkt N wyznaczamy tak samo, jak w sposobie I. Punkt Z przecięcia prostej MN z prostą BB' należy do płaszczyzny KLM (rys. 13). Prowadząc teraz prostą ZK, dostajemy punkt P jej przecięcia z krawędzią AB oraz punkt T jej przecięcia z prostą $A'B'$ (punkty P i T należą do płaszczyzny KLM). Punkt O przecięcia prostej LT z krawędzią $A'D'$ także należy do płaszczyzny KLM. Ostatecznie otrzymujemy sześciokąt $KOLNMP$, który jest szukanym przekrojem.



rys. 13