Ciągi arytmetyczne

Definicja

Ciąg arytmetyczny to ciąg, w którym różnica między kolejnymi wyrazami jest stała, czyli

$$a_{n+1} - a_n = const$$

Tę stałą różnicę w ciągu arytmetycznym będziemy oznaczali literą r. Czyli $a_{n+1} - a_n = r$ lub równoważnie $a_{n+1} = a_n + r$.

Definicja

Ciąg arytmetyczny to ciąg, w którym różnica między kolejnymi wyrazami jest stała, czyli

$$a_{n+1} - a_n = const$$

Tę stałą różnicę w ciągu arytmetycznym będziemy oznaczali literą r. Czyli $a_{n+1} - a_n = r$ lub równoważnie $a_{n+1} = a_n + r$.

Czyli ta różnica to jest to, co dodajemy do danego wyrazu, by otrzymać kolejny.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 0.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 0.
- $1, 2, 4, 8, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 0.
- $1, 2, 4, 8, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, $2 - 1 \neq 4 - 2 \neq 8 - 4$.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Mamy a_1 i r.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Mamy a_1 i r.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\
a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r
\end{aligned}$$

itd.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Mamy a_1 i r.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\
a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r
\end{aligned}$$

itd. Nietrudno uogólnić ten wzór do $a_n = a_1 + (n-1)r$. Czyli np. $a_{17} = a_1 + 16r$ i $a_{100} = a_1 + 99r$.

Ważny i prosty wzór

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Prosta konsekwencja ważnego i prostego wzoru

Żeby uzyskać wyraz n-ty to muszę do wyrazu pierwszego dodać $(n-1)$ razy różnicę r. Jeśli natomiast chcę uzyskać wyraz n-ty, ale zaczynając od wyrazu k-tego, to muszę dodać $(n-k)$ razy r. Czyli

$$a_n = a_k + (n-k)r$$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

b) $10, 7, 4, 1...$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

b) $10, 7, 4, 1...$
Obliczamy różnicę: $r = 7 - 10 = -3$.

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

b) $10, 7, 4, 1...$
Obliczamy różnicę: $r = 7 - 10 = -3$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 10 - 57 = -47$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

b) $a_{20} = 10$, $a_{40} = 90$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

b) $a_{20} = 10$, $a_{40} = 90$
Obliczamy różnicę: $20r = a_{40} - a_{20} = 90 - 10 = 80$, czyli $r = 4$.

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

b) $a_{20} = 10$, $a_{40} = 90$
Obliczamy różnicę: $20r = a_{40} - a_{20} = 90 - 10 = 80$, czyli $r = 4$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{11} = a_{20} - 9r = 10 - 36 = -26$

Podsumowanie

Najważniejsze jest to, by pamiętać, jak powstają kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego - poprzez dodanie stałej różnicy r. Jeśli więc chcemy uzyskać wyraz numer 17 z wyrazu numer 12, to muszę tę różnicę dodać 5 razy, czyli $a_{17} = a_{12} + 5r$. Analogicznie jeśli chcę otrzymać wyraz numer 36 z wyrazu numer 51, to muszę różnicę odjąć 15 razy, czyli $a_{36} = a_{51} - 15r$.

Sum n wyrazów ciągu

Przez S_n oznaczamy sumę pierwszych n wyrazów ciągu, czyli:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Sum n wyrazów ciągu

Przez S_n oznaczamy sumę pierwszych n wyrazów ciągu, czyli:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Czyli np.

$S_1 = a_1$,

Sum n wyrazów ciągu

Przez S_n oznaczamy sumę pierwszych n wyrazów ciągu, czyli:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Czyli np.

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

Sum n wyrazów ciągu

Przez S_n oznaczamy sumę pierwszych n wyrazów ciągu, czyli:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Czyli np.

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$

Sum n wyrazów ciągu

Ważne, by umieć wykorzystywać wzory na sumę ciągu.

Sum n wyrazów ciągu

Ważne, by umieć wykorzystywać wzory na sumę ciągu. W szczególności pamiętajmy, że skoro

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$ oraz

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, to

Sum n wyrazów ciągu

Ważne, by umieć wykorzystywać wzory na sumę ciągu. W szczególności pamiętajmy, że skoro

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$ oraz

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, to

$a_n = S_n - S_{n-1}$,

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Oblicz piąty wyraz ciągu, jeśli suma jego pierwszych n wyrazów dana jest wzorem $S_n = 2^n + n$.

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Oblicz piąty wyraz ciągu, jeśli suma jego pierwszych n wyrazów dana jest wzorem $S_n = 2^n + n$.

Obliczamy $S_5 = 2^5 + 5 = 37$ oraz $S_4 = 2^4 + 4 = 20$,

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Oblicz piąty wyraz ciągu, jeśli suma jego pierwszych n wyrazów dana jest wzorem $S_n = 2^n + n$.

Obliczamy $S_5 = 2^5 + 5 = 37$ oraz $S_4 = 2^4 + 4 = 20$, czyli
$a_5 = 37 - 20 = 17$

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Zauważmy, że ciąg, którego suma jest dana wzorem $S_n = 2^n + n$ nie jest ciągiem arytmetycznym.

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Zauważmy, że ciąg, którego suma jest dana wzorem $S_n = 2^n + n$ nie jest ciągiem arytmetycznym.

Mamy $a_1 = S_1 = 2^1 + 1 = 3$,

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Zauważmy, że ciąg, którego suma jest dana wzorem $S_n = 2^n + n$ nie jest ciągiem arytmetycznym.

Mamy $a_1 = S_1 = 2^1 + 1 = 3$, $a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 + 2 - 3 = 3$,

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Zauważmy, że ciąg, którego suma jest dana wzorem $S_n = 2^n + n$ nie jest ciągiem arytmetycznym.

Mamy $a_1 = S_1 = 2^1 + 1 = 3$, $a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 + 2 - 3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = 2^3 + 3 - 6 = 5$.

Sum n wyrazów ciągu - przykład 1

Zauważmy, że ciąg, którego suma jest dana wzorem $S_n = 2^n + n$ nie jest ciągiem arytmetycznym.

Mamy $a_1 = S_1 = 2^1 + 1 = 3$, $a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 + 2 - 3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = 2^3 + 3 - 6 = 5$.

$a_2 - a_1 = 0$, ale $a_3 - a_2 = 2$, czyli to nie jest ciąg arytmetyczny.

Sum n wyrazów ciągu arytmetycznego

Dla ciągu arytmetycznego możemy wyprowadzić przyjemny wzór:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$$

Sum n wyrazów ciągu arytmetycznego

Dla ciągu arytmetycznego możemy wyprowadzić przyjemny wzór:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$$

Czyli otrzymujemy:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Sum n wyrazów ciągu arytmetycznego

Teraz zauważmy, że każdy nawias jest równy $a_1 + a_n$, gdyż mamy:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + (k-1)r + a_n - (k-1)r = a_1 + a_n$$

Sum n wyrazów ciągu arytmetycznego

Teraz zauważmy, że każdy nawias jest równy $a_1 + a_n$, gdyż mamy:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + (k-1)r + a_n - (k-1)r = a_1 + a_n$$

Tych nawiasów jest n, więc otrzymujemy:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

Sum n wyrazów ciągu arytmetycznego

Teraz zauważmy, że każdy nawias jest równy $a_1 + a_n$, gdyż mamy:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + (k-1)r + a_n - (k-1)r = a_1 + a_n$$

Tych nawiasów jest n, więc otrzymujemy:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

czyli:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Sum n wyrazów ciągu arytmetycznego

Mamy więc następujący wzór na sumę początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Sum n wyrazów ciągu arytmetycznego

Mamy więc następujący wzór na sumę początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Podstawiając $a_n = a_1 + (n-1)r$ otrzymujemy dodatkowy wzór:

$$S_n = \frac{n \cdot (2a_1 + (n-1)r)}{2}$$

Przykład

Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które nie są podzielne przez 5.

Przykład

Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które nie są podzielne przez 5.

Obliczymy sumę dwóch ciągów: a_n wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200 oraz b_n wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które są podzielne przez 5.

Przykład

Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które nie są podzielne przez 5.

Obliczymy sumę dwóch ciągów: a_n wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200 oraz b_n wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które są podzielne przez 5. Następnie odejmiemy od siebie te dwie sumy.

Przykład

Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które nie są podzielne przez 5.

Przykład

Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które nie są podzielne przez 5.

Dla a_n mamy: $a_1 = 1, n = 200, a_{200} = 200$, czyli $S_a = \frac{200\cdot(1+200)}{2} = 20100$

Przykład

Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które nie są podzielne przez 5.

Dla a_n mamy: $a_1 = 1, n = 200, a_{200} = 200$, czyli $S_a = \frac{200 \cdot (1+200)}{2} = 20100$

Dla b_n mamy: $b_1 = 5, n = 40, b_{40} = 200$, czyli $S_b = \frac{40 \cdot (5+200)}{2} = 4100$

Przykład

Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do 200, które nie są podzielne przez 5.

Dla a_n mamy: $a_1 = 1, n = 200, a_{200} = 200$, czyli $S_a = \frac{200\cdot(1+200)}{2} = 20100$

Dla b_n mamy: $b_1 = 5, n = 40, b_{40} = 200$, czyli $S_b = \frac{40\cdot(5+200)}{2} = 4100$

Ostatecznie nasza suma wynosi $S = S_a - S_b = 20100 - 4100 = 16000$

Przykłady różne

Wyrazy $16 - x, 3x - 2$ oraz $2x$ są odpowiednio drugim, trzecim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz pierwszy wyraz tego ciągu.

Przykłady różne

Wyrazy $16 - x, 3x - 2$ oraz $2x$ są odpowiednio drugim, trzecim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz pierwszy wyraz tego ciągu.

Ponieważ mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym, a więc różnica wyrazów jest stała:

$$(3x - 2) - (16 - x) = 2x - (3x - 2)$$

Przykłady różne

Wyrazy $16 - x, 3x - 2$ oraz $2x$ są odpowiednio drugim, trzecim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz pierwszy wyraz tego ciągu.

Ponieważ mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym, a więc różnica wyrazów jest stała:

$$(3x - 2) - (16 - x) = 2x - (3x - 2)$$

Możemy też zapisać, że dwukrotność środkowego wyrazu to suma wyrazów skrajnych:

$$2 \cdot (3x - 2) = 16 - x + 2x$$

Przykłady różne

Wyrazy $16 - x, 3x - 2$ oraz $2x$ są odpowiednio drugim, trzecim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz pierwszy wyraz tego ciągu.

Ponieważ mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym, a więc różnica wyrazów jest stała:

$$(3x - 2) - (16 - x) = 2x - (3x - 2)$$

Możemy też zapisać, że dwukrotność środkowego wyrazu to suma wyrazów skrajnych:

$$2 \cdot (3x - 2) = 16 - x + 2x$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 4$,

Przykłady różne

Wyrazy $16 - x, 3x - 2$ oraz $2x$ są odpowiednio drugim, trzecim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz pierwszy wyraz tego ciągu.

Ponieważ mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym, a więc różnica wyrazów jest stała:

$$(3x - 2) - (16 - x) = 2x - (3x - 2)$$

Możemy też zapisać, że dwukrotność środkowego wyrazu to suma wyrazów skrajnych:

$$2 \cdot (3x - 2) = 16 - x + 2x$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 4$, czyli wyrazy tego ciągu to $12, 10, 8$.

Przykłady różne

Wyrazy $16 - x, 3x - 2$ oraz $2x$ są odpowiednio drugim, trzecim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz pierwszy wyraz tego ciągu.

Ponieważ mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym, a więc różnica wyrazów jest stała:

$$(3x - 2) - (16 - x) = 2x - (3x - 2)$$

Możemy też zapisać, że dwukrotność środkowego wyrazu to suma wyrazów skrajnych:

$$2 \cdot (3x - 2) = 16 - x + 2x$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 4$, czyli wyrazy tego ciągu to $12, 10, 8$. Łatwo już zauważyć, że pierwszy wyraz tego ciągu to 14.

Przykłady różne

Wyrazy $11 - x, 2x + 1$ oraz $3x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz sumę pierwszych dwunastu wyrazów tego ciągu.

Przykłady różne

Wyrazy $11 - x, 2x + 1$ oraz $3x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz sumę pierwszych dwunastu wyrazów tego ciągu.

Ciąg arytmetyczny, czyli jest stała różnica:

$$(2x + 1) - (11 - x) = r$$

Przykłady różne

Wyrazy $11 - x, 2x + 1$ oraz $3x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz sumę pierwszych dwunastu wyrazów tego ciągu.

Ciąg arytmetyczny, czyli jest stała różnica:

$$(2x + 1) - (11 - x) = r$$

ale także:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2r$$

Przykłady różne

Wyrazy $11 - x, 2x + 1$ oraz $3x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz sumę pierwszych dwunastu wyrazów tego ciągu.

Ciąg arytmetyczny, czyli jest stała różnica:

$$(2x + 1) - (11 - x) = r$$

ale także:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2r$$

Podstawiamy za r pierwsze równanie i otrzymujemy:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2 \cdot (2x + 1 - 11 + x)$$

Przykłady różne

Wyrazy $11 - x, 2x + 1$ oraz $3x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz sumę pierwszych dwunastu wyrazów tego ciągu.

Ciąg arytmetyczny, czyli jest stała różnica:

$$(2x + 1) - (11 - x) = r$$

ale także:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2r$$

Podstawiamy za r pierwsze równanie i otrzymujemy:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2 \cdot (2x + 1 - 11 + x)$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 4$.

Przykłady różne

Wyrazy $11 - x, 2x + 1$ oraz $3x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz sumę pierwszych dwunastu wyrazów tego ciągu.

Ciąg arytmetyczny, czyli jest stała różnica:

$$(2x + 1) - (11 - x) = r$$

ale także:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2r$$

Podstawiamy za r pierwsze równanie i otrzymujemy:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2 \cdot (2x + 1 - 11 + x)$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 4$. Mamy więc $a_1 = 7$ oraz $a_2 = 9$, czyli $r = 2$.

Przykłady różne

Wyrazy $11 - x, 2x + 1$ oraz $3x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazym ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz sumę pierwszych dwunastu wyrazów tego ciągu.

Ciąg arytmetyczny, czyli jest stała różnica:

$$(2x + 1) - (11 - x) = r$$

ale także:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2r$$

Podstawiamy za r pierwsze równanie i otrzymujemy:

$$(3x + 1) - (2x + 1) = 2 \cdot (2x + 1 - 11 + x)$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 4$. Mamy więc $a_1 = 7$ oraz $a_2 = 9$, czyli $r = 2$. Obliczamy S_{12} ze wzoru $S_n = \frac{n \cdot (2a_1 + (n-1)r)}{2}$:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (2 \cdot 7 + 11 \cdot 2)}{2} = 216$$

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym n-ty wyraz jest równy 11, suma pierwszych n wyrazów wynosi 72, natomiast pierwszy wyraz ma wartość $\frac{1}{n}$. Oblicz n.

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym n-ty wyraz jest równy 11, suma pierwszych n wyrazów wynosi 72, natomiast pierwszy wyraz ma wartość $\frac{1}{n}$. Oblicz n.

Zapisujemy wzór na sumę pierwszych n wyrazów:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym n-ty wyraz jest równy 11, suma pierwszych n wyrazów wynosi 72, natomiast pierwszy wyraz ma wartość $\frac{1}{n}$. Oblicz n.

Zapisujemy wzór na sumę pierwszych n wyrazów:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

czyli:

$$72 = \frac{n \cdot (\frac{1}{n} + 11)}{2}$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $n = 13$.

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym ósmy wyraz jest równy 5, suma pierwszych 16 wyrazów wynosi 84. Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów tego ciągu.

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym ósmy wyraz jest równy 5, suma pierwszych 16 wyrazów wynosi 84. Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów tego ciągu.

Zapisujemy dwa wzory:

$$a_8 = a_1 + 7r$$

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym ósmy wyraz jest równy 5, suma pierwszych 16 wyrazów wynosi 84. Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów tego ciągu.

Zapisujemy dwa wzory:

$$a_8 = a_1 + 7r$$

oraz:

$$S_{16} = \frac{16 \cdot (2a_1 + 15r)}{2}$$

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym ósmy wyraz jest równy 5, suma pierwszych 16 wyrazów wynosi 84. Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów tego ciągu.

Zapisujemy dwa wzory:

$$a_8 = a_1 + 7r$$

oraz:

$$S_{16} = \frac{16 \cdot (2a_1 + 15r)}{2}$$

Podstawiając $a_8 = 5$ oraz $S_{16} = 84$ mamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

Przykłady różne

W ciągu arytmetycznym ósmy wyraz jest równy 5, suma pierwszych 16 wyrazów wynosi 84. Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów tego ciągu.

Zapisujemy dwa wzory:

$$a_8 = a_1 + 7r$$

oraz:

$$S_{16} = \frac{16 \cdot (2a_1 + 15r)}{2}$$

Podstawiając $a_8 = 5$ oraz $S_{16} = 84$ mamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Rozwiązujemy i otrzymujemy $a_1 = 1.5$ oraz $r = 0.5$.

Przykłady różne

Teraz obliczamy S_{10}:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (2 \cdot 1.5 + 9 \cdot 0.5)}{2} = 37.5$$

Środkowy wyraz

W ciągu arytmetycznym warto pamiętać o wykorzystywaniu środkowego wyrazu.

Środkowy wyraz

W ciągu arytmetycznym warto pamiętać o wykorzystywaniu środkowego wyrazu. Przykładowo jeśli wiemy, że

$$S_7 = 21$$

Środkowy wyraz

W ciągu arytmetycznym warto pamiętać o wykorzystywaniu środkowego wyrazu. Przykładowo jeśli wiemy, że

$$S_7 = 21$$

to możemy łatwo wyliczyć czwarty wyraz, gdyż $a_4 = \frac{a_1+a_7}{2}$, czyli

$$S_7 = \frac{7 \cdot (a_1 + a_7)}{2} = 7a_4$$

Środkowy wyraz

W ciągu arytmetycznym warto pamiętać o wykorzystywaniu środkowego wyrazu. Przykładowo jeśli wiemy, że

$$S_7 = 21$$

to możemy łatwo wyliczyć czwarty wyraz, gdyż $a_4 = \frac{a_1+a_7}{2}$, czyli

$$S_7 = \frac{7 \cdot (a_1 + a_7)}{2} = 7a_4$$

i otrzymujemy $a_4 = 3$.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.