1 ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

DOWÓD 37 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Dla $n \in \mathbb{N}$:

$2n+1$ — I liczba nieparzysta,

$2n+3$ — II liczba nieparzysta,

$2n+5$ — III liczba nieparzysta,

$2n+7$ — IV liczba nieparzysta,

$2n+9$ — V liczba nieparzysta.

$2n+1+2n+3+2n+5+2n+7+2n+9=10n+25=5\underbrace{(2n+5)}_{k\in\mathbb{C}}=5k$, więc suma jest podzielna przez 5.

DOWÓD 38 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Dla $n \in \mathbb{N}$:

$3n$ — I liczba podzielna przez 3,

$3n+3$ — II liczba podzielna przez 3,

$3n+6$ — III liczba podzielna przez 3,

$3n+9$ — IV liczba podzielna przez 3.

$3n+3n+3+3n+6+3n+9=12n+18=6\underbrace{(2n+3)}_{k\in\mathbb{C}}=6k$, więc suma jest podzielna przez 6.

DOWÓD 39 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Dla $n \in \mathbb{C}$:

$2n+1$ — I liczba nieparzysta,

$2n+3$ — II liczba nieparzysta,

$2n+5$ — III liczba nieparzysta.

$(2n+1)^2+(2n+3)^2+(2n+5)^2+1=4n^2+4n+1+4n^2+12n+9+4n^2+20n+25+1=12n^2+36n+36=$
$=12\underbrace{(n^2+3n+3)}_{k\in\mathbb{C}}=12k$, więc suma kwadratów jest podzielna przez 12.

DOWÓD 40 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$n^2+(n+7)^2+1=n^2+n^2+14n+49+1=2n^2+14n+50=2\underbrace{(n^2+7n+25)}_{k\in\mathbb{C}}=2k$

Otrzymaliśmy liczbę podzielną przez 2, więc jest to liczba parzysta.

DOWÓD 41 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$(4n+1)^2-(4m-1)^2=16n^2+8n+1-(16m^2-8m+1)=16n^2+8n+\cancel{1}-16m^2+8m-\cancel{1}=16n^2+8n-16m^2+8m=$
$=8\underbrace{(2n^2+n-2m^2+m)}_{k\in\mathbb{C}}=8k$, więc liczba jest podzielna przez 8.

DOWÓD 42 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$8^{1000}-5\cdot 8^{999}+3\cdot 8^{998}=8^{998}(8^2-5\cdot 8+3)=8^{998}(64-40+3)=8^{998}\cdot 27=\underbrace{8^{998}}_{k\in\mathbb{C}}\cdot 27=27k$, więc liczba jest podzielna przez 27.

DOWÓD 43 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$999+999^2+999^3+999^4+999^5+999^6+999^7+999^8=999(1+999)+999^3(1+999)+999^5(1+999)+999^7(1+999)=$
$=1000\underbrace{(999+999^3+999^5+999^7)}_{k\in\mathbb{C}}=1000k$, więc liczba jest podzielna przez 1000.

DOWÓD 44 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$103+103^2+103^3+104^4+\ldots+103^{17}+103^{18}=103(1+103)+103^3(1+103)+\ldots+103^{17}(1+103)=$
$=104(103+103^3+\ldots+103^{17})=\underbrace{104\cdot 103}_{10\,712}\cdot\underbrace{(1+103^2+\ldots+103^{16})}_{k\in\mathbb{C}}=10\,712k$, więc wyrażenie jest podzielne przez 10 712.

DOWÓD 45 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$9+9^2+9^3+\ldots+9^{99}=9(1+9+9^2)+9^4(1+9+9^2)+\ldots+9^{97}(1+9+9^2)=$
$=(1+9+81)(9+9^4+\ldots+9^{98})=91(9+9^4+\ldots+9^{97})=13\cdot\underbrace{7\cdot(9+9^4+\ldots+9^{97})}_{k\in\mathbb{C}}=13k$, więc liczba jest podzielna przez 13.

DOWÓD 46 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$5^{10}+2\cdot 5^9+5^8=5^8(5^2+2\cdot 5+1)=5^8(25+10+1)=36\cdot\underbrace{5^8}_{k\in\mathbb{C}}=36k$, więc liczba jest podzielna przez 36.

DOWÓD 47 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$5^n+5^{n+1}+5^{n+2}+5^{n+3}=5^n+5\cdot 5^n+5^2\cdot 5^n+5^3\cdot 5^n=5^n+5\cdot 5^n+25\cdot 5^n+125\cdot 5^n=156\cdot 5^n=156\cdot 5\cdot 5^{n-1}=$
$=39\cdot 4\cdot 5\cdot 5^{n-1}=39\cdot 5\cdot 4\cdot 5^{n-1}=195\cdot\underbrace{4\cdot 5^{n-1}}_{k\in\mathbb{C}}=195k$, więc liczba jest podzielna przez 195.

DOWÓD 48 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$4^{n+2}+4\cdot 5^{n+1}+4^{n+1}=4^n\cdot 4^2+4\cdot 5^n\cdot 5+4\cdot 4^n=16\cdot 4^n+20\cdot 5^n+4\cdot 4^n=20\cdot 4^n+20\cdot 5^n=20\cdot\underbrace{(4^n+5^n)}_{k\in\mathbb{C}}=20k$, więc liczba jest wielokrotnością liczby 20.

DOWÓD 49 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$5^{16}-2^{16}=(5^8-2^8)(5^8+2^8)=(5^4-2^4)(5^4+2^4)(5^8+2^8)=(5^2-2^2)\underbrace{(5^2+2^2)}_{29}(5^4+2^4)(5^8+2^8)=$

$=29\cdot\underbrace{(5^2-2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)}_{k\in\mathbb{C}}=29k$, więc liczba jest podzielna przez 29.

DOWÓD 50 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$1007^3+993^3=\underbrace{(1007+993)}_{2000}(1007^2-1007\cdot 993+993^2)=1000\cdot\underbrace{2\cdot(1007^2-1007\cdot 993+993^2)}_{k\in\mathbb{C}}=1000k$, więc liczba jest podzielna przez 1000.

DOWÓD 51 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$6^9-5^9=(6^3-5^3)(6^6+6^3\cdot 5^3+5^6)=(216-125)(6^6+6^3\cdot 5^3+5^6)=91\cdot\underbrace{(6^6+6^3\cdot 5^3+5^6)}_{k\in\mathbb{C}}=91k$, więc liczba jest podzielna przez 91.

DOWÓD 52 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$(n^2+n)(n^2-3n+2)=n(n+1)(n^2-3n+2)=n(n+1)(n-1)(n-2)=\underbrace{(n-2)(n-1)n(n+1)}_{24k,\ k\in\mathbb{C}}=24k$

Otrzymaliśmy iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 24.

DOWÓD 53 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Dla $n \in \mathbb{C}$:
$2n$ — I liczba parzysta,
$2n+2$ — II liczba parzysta,
$2n+4$ — III liczba parzysta.

$$2n(2n+2)(2n+4) = 2n \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot 2 \cdot (n+2) = 8\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}} = 48k$$

Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, więc wyjściowy iloczyn jest podzielny przez $8 \cdot 6 = 48$.

DOWÓD 54 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$n^2k^2 - nk^2 + kn^2 - kn = k^2(n^2-n) + k(n^2-n) = (n^2-n)(k^2+k) = \underbrace{n(n-1)}_{2l,\ l \in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{k(k+1)}_{2m,\ m \in \mathbb{C}} = 2l \cdot 2m = 4lm$, więc wyrażenie jest podzielne przez 4.

DOWÓD 55 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Kolejne liczby podzielne przez 5 dla $n \in \mathbb{C}$ to:
$5n$ — I liczba
$5n+5$ — II liczba

$[5n \cdot (5n+5)]^2 = [5n \cdot 5(n+1)]^2 = [25\underbrace{n(n+1)}_{2k,\ k \in \mathbb{C}}]^2 = (25 \cdot 2k)^2 = (50k)^2 = 2500k^2$, więc wyrażenie jest podzielne przez 2500.

DOWÓD 56 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Rozkładamy wyrażenie dowolną metodą do postaci iloczynowej.

$$n^5 - 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 6n = n(\underbrace{n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 5n - 6}_{W(n)}) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n-3) =$$

$W(1) = 0$, więc $n = 1$ jest pierwiastkiem $W(n)$
$W(-1) = 0$, więc $n = -1$ jest pierwiastkiem $W(n)$
$W(2) = 0$, więc $n = 2$ jest pierwiastkiem $W(n)$
$W(3) = 0$, więc $n = 3$ jest pierwiastkiem $W(n)$

$= \underbrace{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}_{120k,\ k \in \mathbb{C}} = 120k = 5! \cdot k$, ponieważ iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 120, więc liczba jest podzielna przez 5!.

DOWÓD 57 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$W(x) = 2(x-2)(x-4)(x-6)$

$2n$ — dowolna liczba parzysta, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$W(2n) = 2(2n-2)(2n-4)(2n-6) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2(n-1)(n-2)(n-3) = 16\underbrace{(n-1)(n-2)(n-3)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}} = 96k$$

Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, więc wielomian jest podzielny przez $16 \cdot 6 = 96$.

DOWÓD 58 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$7^{30} - 8 \cdot 7^{20} + 15 \cdot 7^{10} = 7^{10}(7^{20} - 8 \cdot 7^{10} + 15)$

Niech $t = 7^{10} \rightarrow 7^{20} - 8 \cdot 7^{10} + 15 = t^2 - 8t + 15 = (t-5)(t-3) = (7^{10}-5)(7^{10}-3)$, więc

$7^{30} - 8 \cdot 7^{20} + 15 \cdot 7^{10} = 7^{10}\underbrace{(7^{10}-5)}_{2k}\underbrace{(7^{10}-3)}_{2k+2,\ k \in \mathbb{C}} = 7^{10} \cdot 2k \cdot (2k+2) = 7^{10} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{k(k+1)}_{2l,\ l \in \mathbb{C}} = 7^{10} \cdot 8l = 56 \cdot 7^9 l$, więc liczba jest podzielna przez 56.

DOWÓD 59 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$81^n-1=9^{2n}-1=(9^n-1)(9^n+1)=(3^{2n}-1)(9^n+1)=\underbrace{(3^n-1)}_{2k}\underbrace{(3^n+1)}_{2k+2,\ k\in\mathbb{C}}\underbrace{(9^n+1)}_{2l,\ l\in\mathbb{C}}=$

$=2k(2k+2)\cdot 2l=8\underbrace{k(k+1)}_{2m,\ m\in\mathbb{C}}\cdot l=16ml$, więc liczba jest wielokrotnością liczby 16.

DOWÓD 60 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$16^7-1=\underbrace{(16-1)}_{15}\underbrace{(16^6+16^5+16^4+16^3+16^2+16+1)}_{k\in\mathbb{C}}=15k$, więc liczba jest wielokrotnością liczby 15.

DOWÓD 61 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Niech $t=113^2 \quad\rightarrow\quad 113^4-3\cdot113^2-4=t^2-3t-4=(t+1)(t-4)$, więc

$113^4-3\cdot113^2-4=(113^2+1)(113^2-4)=(113-2)(113+2)(113^2+1)=111\cdot115\cdot(113^2+1)=$

$=111\cdot5\cdot23\cdot\underbrace{(113^2+1)}_{5k,\ k\in\mathbb{C}}=25\cdot111\cdot23k$, więc wyrażenie jest podzielne przez 25.

DOWÓD 62 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Niech $t=6^{200} \quad\rightarrow\quad 6^{400}-17\cdot6^{200}+16=t^2-17t+16=(t-1)(t-16)$, więc

$6^{400}-17\cdot6^{200}+16=(6^{200}-1)(6^{200}-16)=\underbrace{(6^{100}-1)}_{5k,\ k\in\mathbb{C}}\underbrace{(6^{100}+1)}_{l\in\mathbb{C}}\underbrace{(6^{100}-4)}_{2m,\ m\in\mathbb{C}}\underbrace{(6^{100}+4)}_{10n,\ n\in\mathbb{C}}=$

$=5k\cdot l\cdot 2m\cdot 10n=100klmn$, więc liczba jest podzielna przez 100.

DOWÓD 63 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$10^n-7=\underbrace{999\ldots9}_{n-1\ \text{dziewiątek}}3=3k,\ k\in\mathbb{C}$

Suma cyfr tej liczby to $9\cdot(n-1)+3=9n-6=3(3n-2)$. Suma cyfr jest wielokrotnością liczby 3, więc dzieli się przez 3.

$(10^n-7)^2=(3k)^2=9k^2$, więc liczba jest podzielna przez 9.

DOWÓD 64 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$100^n+5=1\underbrace{00\ldots0}_{2n\ \text{zer}}+5=1\underbrace{00\ldots0}_{2n-1\ \text{zer}}5=15k,\ k\in\mathbb{C}$

Suma cyfr liczby 100^n+5 jest równa 6, więc liczba dzieli się przez 3. Ostatnią cyfrą jest 5, więc liczba dzieli się przez 5. Wynika z tego, że liczba dzieli się przez $3\cdot5$, czyli 15.

DOWÓD 65 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$XXX+XX+X=100X+10X+X+10X+X+X=123X=41\cdot\underbrace{3X}_{k\in\mathbb{C}}=41k$, więc liczba jest podzielna przez 41.

DOWÓD 66 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$ABC+CAB+BCA=100A+10B+C+100C+10A+B+100B+10C+A=111A+111B+111C=111\cdot\underbrace{(A+B+C)}_{k\in\mathbb{C}}=111k$, więc liczba jest podzielna przez 111.

DOWÓD 67 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12=2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot9\cdot2\cdot5\cdot11\cdot2^2\cdot3=$

$=2^1\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2^1\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot9\cdot2^1\cdot5\cdot11\cdot2^2\cdot3=2^{1+2+1+3+1+2}\cdot3\cdot5\cdot3\cdot7\cdot9\cdot5\cdot11\cdot3=$

$= 2^{10} \cdot \underbrace{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3}_{k \in \mathbb{C}} = 2^{10}k$, więc iloczyn jest podzielny przez 2^{10}.

DOWÓD 68 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$p - 3 = 7k \quad \rightarrow \quad p = 7k + 3$

$p^2 + 5 = (7k+3)^2 + 5 = 49k^2 + 42k + 9 + 5 = 49k^2 + 42k + 14 = 7\underbrace{(7k^2 + 6k + 2)}_{l \in \mathbb{C}} = 7l$, więc liczba jest podzielna przez 7.

DOWÓD 69 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$4^{202} + 2 \cdot 4^{101} \cdot 6^{101} + 6^{202} = (\underbrace{4^{101} + 6^{101}}_{10k,\ k \in \mathbb{C}})^2 = 100k^2$

Ostatnią cyfrą potęgi 4^{101} jest cyfra 4, a ostatnią cytrą potęgi 6^{101} jest cyfra 6, więc ostatnią cyfrą $4^{101} + 6^{101}$ jest cyfra 0. Liczba $4^{101} + 6^{101}$ jest wielokrotnością liczby 10, więc liczba jest podzielna przez $10^2 = 100$.

DOWÓD 70 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$

$$+\begin{cases} W(1) = a + b + c + d = 5 \\ W(-1) = -a + b - c + d = 4 \end{cases}$$

$$2b + 2d = 9$$

$$2\underbrace{(b+d)}_{k \in \mathbb{C}} = 9$$

$$2k = 9$$

Nie jest możliwe, by wielokrotność liczby 2 była równa 9, więc wielomian $W(x)$ nie istnieje.

DOWÓD 71 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Przekształcamy wyrażenie: $(a^2b - ab^2)^2 = [ab(a-b)]^2$

Rozpatrujemy przypadki:

Przypadek 1. Jeśli a i b są liczbami parzystymi, to $a = 2k$, $b = 2l$, gdzie $k, l \in \mathbb{C}$

$[ab(a-b)]^2 = [2k \cdot 2l \cdot (2k - 2l)]^2 = [8kl(k-l)]^2 = 64\underbrace{k^2l^2(k-l)^2}_{m \in \mathbb{C}} = 4 \cdot 16m$, więc liczba jest podzielna przez 4.

Przypadek 2. Jeżeli a jest liczbą nieparzystą, a b jest liczbą parzystą, to $a = 2k + 1$, $b = 2l$, gdzie $k, l \in \mathbb{C}$

$[ab(a-b)]^2 = [(2k+1) \cdot 2l \cdot (2k + 1 - 2l)]^2 = 4\underbrace{[(2k+1) \cdot l \cdot (2k + 1 - 2l)]^2}_{m \in \mathbb{C}} = 4m$, więc liczba jest podzielna przez 4.

Przypadek 3. Jeżeli a jest liczbą parzystą, a b jest liczbą nieparzystą, to otrzymamy analogiczną sytuację jak w przypadku 2.

Przypadek 4. Jeżeli a i b są liczbami nieparzystymi, to $a = 2k + 1$, $b = 2l + 1$, gdzie $k, l \in \mathbb{C}$

$[ab(a-b)]^2 = [(2k+1)(2l+1)(2k + 1 - 2l - 1)]^2 = [(2k+1)(2l+1)(2k-2l)]^2 = 4\underbrace{[(2k+1)(2l+1)(k-l)]^2}_{m \in \mathbb{C}} = 4m$, więc liczba jest podzielna przez 4.

DOWÓD 72 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Iloczyn jest podzielny przez 4, jeśli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 4.

Liczby przy dzieleniu przez 4 mogą mieć reszty 0, 1, 2 lub 3.

Rozpatrujemy przypadki:

Przypadek 1. Dla reszty 0: $a = 4k,\ k \in \mathbb{C}$. Czynnik $a^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 4 \cdot 4k^2$ jest podzielny przez 4.

Przypadek 2. Dla reszty 1: $a = 4k + 1,\ k \in \mathbb{C}$. Czynnik $a + 3 = 4k + 1 + 3 = 4(k + 1)$ jest podzielny przez 4.

Przypadek 3. Dla reszty 2: $a = 4k + 2,\ k \in \mathbb{C}$. Czynnik $a^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1)$ jest podzielny przez 4.

Przypadek 4. Dla reszty 3: $a = 4k + 3,\ k \in \mathbb{C}$. Czynnik $a + 1 = 4k + 3 + 1 = 4(k + 1)$ jest podzielny przez 4.

Dla wszystkich przypadków jest zawsze spełniona podzielność przez 4 dla któregoś z czynników, więc liczba dzieli się przez 4.