

## 3

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

## DOWÓD 109 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$a = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{12}}{\sqrt{13} - \sqrt{12}} + \frac{\sqrt{13} - \sqrt{12}}{\sqrt{13} + \sqrt{12}} = \frac{(\sqrt{13} + \sqrt{12})^2 + (\sqrt{13} - \sqrt{12})^2}{(\sqrt{13} - \sqrt{12})(\sqrt{13} + \sqrt{12})} =$$

$$= \frac{13 + 2\sqrt{156} + 12 + 13 - 2\sqrt{156} + 12}{13 - 12} = \frac{50}{1} = 50, \text{ liczba } 50 \text{ jest liczbą naturalną parzystą.}$$

## DOWÓD 110 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{25}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{25}} \cdot \frac{\sqrt{24} - \sqrt{25}}{\sqrt{24} - \sqrt{25}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \dots + \sqrt{24} - \sqrt{25}}{-1} =$$

$$= \frac{1 - 5}{-1} = 4 = 2^2$$

## DOWÓD 111 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\frac{1008^2 - 1007^2 + 1006^2 - 1005^2 + 1004^2 - 1003^2 + 1002^2 - 1001^2}{1005^2 - 1004^2} =$$

$$= \frac{(1008 - 1007)(1008 + 1007) + (1006 - 1005)(1006 + 1005) + (1004 - 1003)(1004 + 1003) + (1002 - 1001)(1002 + 1001)}{(1005 - 1004)(1005 + 1004)} =$$

$$= \frac{2015 + 2011 + 2007 + 2003}{2009} = \frac{8036}{2009} = 4 = 2^2$$

## DOWÓD 112 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\sqrt{\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2024})(1 - \frac{1}{2025})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2024})(1 - \frac{1}{2025})}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2023}{2024} \cdot \frac{2024}{2025}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2025}}} = \frac{1}{\frac{1}{45}} = 45 = 9 \cdot 5, \text{ więc liczba jest wielokrotnością liczby } 9.$$

## DOWÓD 113 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\frac{100^{50} - 1}{10^{50} + 1} = \frac{(10^2)^{50} - 1}{10^{50} + 1} = \frac{10^{100} - 1}{10^{50} + 1} = \frac{(10^{50} + 1)(10^{50} - 1)}{10^{50} + 1} = (10^{50} - 1) \in \mathbb{C}$$

## DOWÓD 114 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\frac{77^6 - 23^6}{79^2 - 29^2} = \frac{(77^2)^3 - (23^2)^3}{(79 - 29)(79 + 29)} = \frac{(77^2 - 23^2)(77^4 + 77^2 \cdot 23^2 + 23^4)}{50 \cdot 108} =$$

$$= \frac{(77 - 23)(77 + 23)(77^4 + 77^2 \cdot 23^2 + 23^4)}{50 \cdot 108} = \frac{54 \cdot 100 \cdot (77^4 + 77^2 \cdot 23^2 + 23^4)}{50 \cdot 108} = 77^4 + 77^2 \cdot 23^2 + 23^4 \in \mathbb{C}$$

**DOWÓD 115 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{30 + 10\sqrt{5}} =$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{a^2 + b^2} \quad 2ab \\ 2ab = 6\sqrt{5} \\ ab = 3\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \\ a = 3 \\ \rightarrow 3^2 + (\sqrt{5})^2 = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{c^2 + d^2} \quad 2cd \\ 2cd = 10\sqrt{5} \\ cd = 5\sqrt{5} \\ d = \sqrt{5} \\ c = 5 \\ \rightarrow 5^2 + (\sqrt{5})^2 = 30 \end{array}$$

$$\sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(5 + \sqrt{5})^2} = |3 - \sqrt{5}| + |5 + \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} = 8 = 2^3, \text{ liczba 2 jest liczbą pierwszą.}$$

**DOWÓD 116 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$(\sqrt{3} + 1)^3 = 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 10$$

$$(1 - \sqrt{3})^3 = 1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3} = 10 - 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3} = \sqrt{3} + 1 + 1 - \sqrt{3} = 2$$

**DOWÓD 117 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\text{Niech } \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} = x \quad |^3$$

$$9 - 4\sqrt{5} + 3(\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}})^2 \cdot \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} \cdot (\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}})^2 + 9 + 4\sqrt{5} = x^3$$

$$18 + 3\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} \cdot \underbrace{(\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}})}_x = x^3$$

$$18 + 3\sqrt[3]{81 - 80}x = x^3$$

$$18 + 3x = x^3$$

$$x^3 - 3x - 18 = 0$$

Sprawdzamy, czy liczba 3 jest rozwiązaniem równania:

$$3^3 - 3 \cdot 3 - 18 = 0, \text{ więc } x = 3 \text{ jest rozwiązaniem,}$$

$$\text{czyli } \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} = 3$$

**DOWÓD 118 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Założenie:  $a > 0$

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} \quad |^2$$

$$a^2 = 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}_a$$

$$a^2 = 2 + a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3 \quad a_1 = -1 \notin \mathbb{R}_+ \text{ oraz } a_2 = 2,$$

$$\text{więc } a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2, \text{ czyli } a \text{ jest liczbą pierwszą.}$$

**DOWÓD 119** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\text{Niech } \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots}}} = x$$

$$\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots}}} = x \quad |^3$$

$$24 + \underbrace{\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots}}}_x = x^3$$

$$24 + x = x^3$$

$$x^3 - x - 24 = 0$$

Sprawdzamy, czy liczba 3 jest rozwiązaniem równania:

$$3^3 - 3 - 24 = 0, \text{ więc } x = 3 \text{ jest rozwiązaniem,}$$

$$\text{czyli } \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots}}} = 3$$

**DOWÓD 120** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\frac{10^{\overbrace{n \text{ zer}} + 5}}{15} = \frac{10 \dots 0 + 5}{15} = \frac{1 \overbrace{0 \dots 0}^{n-1 \text{ zer}} 5}{15} = \frac{15k}{15} = k \in \mathbb{C}$$

Liczba  $10 \dots 0 5$  jest podzielna przez 15, ponieważ jest podzielna przez 5 i przez 3. Po skróceniu ułamka otrzymujemy liczbę całkowitą.

**DOWÓD 121** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\frac{n^5 - 2n^4 + n^2}{36} = \frac{n^2(n^4 - 2n^2 + 1)}{36} = \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{36} = \left[ \frac{n(n^2 - 1)}{6} \right]^2 = \left[ \frac{\overbrace{(n-1)n(n+1)}^{6k, k \in \mathbb{C}}}{6} \right]^2 = \left[ \frac{6k}{6} \right]^2 = k^2$$

Otrzymałmy kwadrat liczby całkowitej.

**DOWÓD 122** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$625^{125} = (5^4)^{125} = 5^{500}, \quad 125^{250} = (5^3)^{250} = 5^{750}, \quad 5^{500} < 5^{750}, \text{ więc } 625^{125} < 125^{250}$$

**DOWÓD 123** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$12^{120} = (12^2)^{60} = 144^{60}, \quad 5^{180} = (5^3)^{60} = 125^{60}, \quad 144^{60} > 125^{60}, \text{ więc } 12^{120} > 5^{180}$$

**DOWÓD 124** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$10^{25} = (2 \cdot 5)^{25} = 2^{25} \cdot 5^{25}, \quad 25^{10} = (5^2)^{10} = 5^{20}, \quad 2^{25} \cdot 5^{25} > 5^{20}, \text{ więc } 10^{25} > 25^{10}$$

**DOWÓD 125** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$P = 25\sqrt{B} = 25\sqrt{25^{2\sqrt{3}+3}} = 25\sqrt{5^{2(2\sqrt{3}+3)}} = 5^2 \cdot 5^{2\sqrt{3}+3} = 5^{5+2\sqrt{3}} = A = L$$

**DOWÓD 126** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \log_2 4 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 32}{\log_2 16} \cdot \frac{\log_2 64}{\log_2 32} = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = P$$

**DOWÓD 127** PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \log_4 15 \cdot \log_{225} 8 = \frac{\log_2 15}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 225} = \frac{\log_2 15}{2} \cdot \frac{3}{\log_2 15^2} = \frac{\log_2 15}{2} \cdot \frac{3}{2 \log_2 15} = \frac{3}{4} = P$$

**DOWÓD 128 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5^{-3}} - 16^{\log_4 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3 \log_2 5} - 3^{\log_4 16} = 8^{\log_2 5} - 3^2 = 5^{\log_2 8} - 9 = 5^3 - 9 = 125 - 9 = 116 = P$$

**DOWÓD 129 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L = \frac{3a}{1+2a} = \frac{3 \log_2 5}{1+2 \log_2 5} = \frac{\log_2 5^3}{\log_2 2 + \log_2 5^2} = \frac{\log_2 125}{\log_2 2 + \log_2 25} = \frac{\log_2 125}{\log_2 50} = \log_{50} 125 = P$$

**DOWÓD 130 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\begin{aligned} \frac{20}{1 \cdot 2} + \frac{20}{2 \cdot 3} + \frac{20}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{20}{19 \cdot 20} &= 20 \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} \right) = \\ &= 20 \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) = 20 \left( 1 - \frac{1}{20} \right) = 20 \cdot \frac{19}{20} = 19 \end{aligned}$$

19 jest liczbą pierwszą

**DOWÓD 131 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2025 \cdot 2026} + \frac{1}{2026 \cdot 2027} + \frac{1}{2027 \cdot 2028} + \frac{1}{2028} \right)^{-2} &= \left( \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} + \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} + \frac{1}{2027} - \frac{1}{2028} + \frac{1}{2028} \right)^{-2} = \\ &= \left( \frac{1}{2025} \right)^{-2} = 2025^2 = (45^2)^2 = 45^4, \quad 45 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

**DOWÓD 132 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\frac{1}{96} \left( \frac{1}{97} \left( \frac{1}{98} \left( \frac{1}{99} \left( \frac{1}{100} n + \frac{99}{100} \right) + \frac{98}{99} \right) + \frac{97}{98} \right) + \frac{96}{97} \right) = \frac{1}{96} \quad | : \frac{1}{96}$$

$$\frac{1}{97} \left( \frac{1}{98} \left( \frac{1}{99} \left( \frac{1}{100} n + \frac{99}{100} \right) + \frac{98}{99} \right) + \frac{97}{98} \right) + \frac{96}{97} = 1$$

$$\frac{1}{97} \left( \frac{1}{98} \left( \frac{1}{99} \left( \frac{1}{100} n + \frac{99}{100} \right) + \frac{98}{99} \right) + \frac{97}{98} \right) = \frac{1}{97} \quad | : \frac{1}{97}$$

$$\frac{1}{98} \left( \frac{1}{99} \left( \frac{1}{100} n + \frac{99}{100} \right) + \frac{98}{99} \right) + \frac{97}{98} = 1$$

$$\frac{1}{98} \left( \frac{1}{99} \left( \frac{1}{100} n + \frac{99}{100} \right) + \frac{98}{99} \right) = \frac{1}{98} \quad | : \frac{1}{98}$$

$$\frac{1}{99} \left( \frac{1}{100} n + \frac{99}{100} \right) + \frac{98}{99} = 1$$

$$\frac{1}{99} \left( \frac{1}{100} n + \frac{99}{100} \right) = \frac{1}{99} \quad | : \frac{1}{99}$$

$$\frac{1}{100} n + \frac{99}{100} = 1$$

$$\frac{1}{100} n = \frac{1}{100} \quad | \cdot 100$$

$$n = 1$$

1 jest liczbą naturalną