4 ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

DOWÓD 142 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że każdy dowolny element równania możemy pomnożyć przez sumę $x+y$, ponieważ jest ona równa 1. Mnożąc przez tę sumę wyrażenie $3xy$, uzyskamy wzór na sześcian sumy.

$$L = x^3+y^3+3xy = x^3+y^3+3xy(x+y) = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2 = (x+y)^3 = 1^3 = 1 = x+y = P$$

DOWÓD 143 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \frac{(n+1)!+(n+2)!+(n+3)!}{(n+3)^2} = \frac{(n+1)!+(n+1)!(n+2)+(n+1)!(n+2)(n+3)}{(n+3)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)![1+n+2+(n+2)(n+3)]}{(n+3)^2} = \frac{(n+1)!(1+n+2+n^2+3n+2n+6)}{(n+3)^2} = \frac{(n+1)!\cancel{(n^2+6n+9)}}{\cancel{n^2+6n+9}} =$$

$$= (n+1)! = P$$

DOWÓD 144 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \log_a(ab)\cdot\log_b\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\log_b(ab)}{\log_b a}\cdot\frac{\log_a\left(\frac{b}{a}\right)}{\log_a b} = \frac{\log_b(ab)\cdot\log_a\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{1}{\cancel{\log_a b}}\cdot\cancel{\log_a b}} = \log_b(ab)\cdot\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = P$$

DOWÓD 145 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$p+\frac{1}{p} = 5 \quad \big|^2$$

$$p^2+2+\frac{1}{p^2} = 25$$

$$p^2+\frac{1}{p^2} = 23$$

DOWÓD 146 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$n+\frac{1}{n} = 4 \quad \big|^2$$

$$n^2+2+\frac{1}{n^2} = 16$$

$$n^2+\frac{1}{n^2} = 14 \quad \big|^2$$

$$n^4+2+\frac{1}{n^4} = 196$$

$$n^4+\frac{1}{n^4} = 194$$

DOWÓD 147 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$x^3+y^3 = \underbrace{(x+y)}_{3}(x^2-xy+y^2) = 3(\underbrace{x^2+y^2}_{5}-\underbrace{xy}_{2}) = 3(5-2) = 3\cdot 3 = 9$$

$$x+y = 3 \quad \big|^2$$

$$x^2+2xy+y^2 = 9$$

$$5+2xy = 9$$

$$2xy = 4 \quad \big|:2$$

$$\boxed{xy = 2}$$

DOWÓD 148 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L=\frac{1}{\log_2 n}+\frac{1}{\log_4 n}+\frac{1}{\log_6 n}+\ldots+\frac{1}{\log_{2n-2} n}+\frac{1}{\log_{2n} n}=\log_n 2+\log_n 4+\log_n 6+\ldots+\log_n(2n-2)+\log_n 2n=$$

$$=\log_n[2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)]=\log_n[2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2\cdot(n-1)\cdot 2\cdot n]=\log_n[2^n\cdot\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}_{n!}]=$$

$$=\log_n(2^n\cdot n!)=\log_n 2^n+\log_n n!=n\log_n 2+\log_n n!=P$$

DOWÓD 149 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$ab+2=-\frac{1}{ab} \quad \Big|\cdot ab$$

$$a^2b^2+2ab=-1$$

$$a^2b^2+2ab+1=0$$

$$(ab+1)^2=0$$

$$ab=-1$$

DOWÓD 150 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Równanie z postaci iloczynowej przekształcamy i porównujemy z postacią ogólną $ax^2+bx+c=0$.

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

$ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=ax^2+bx+c$, czyli

$-a(x_1+x_2)=b$ oraz $ax_1x_2=c$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_1x_2=\frac{c}{a}$