ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wykaż, że liczba $x = 3^8 - 1$ jest liczbą parzystą.
2. Wykaż, że liczba $5^9 - 1$ jest podzielna przez 4.
3. Liczby $n, n+1, n+2, n+3$ są kolejnymi liczbami naturalnymi. Wykaż, że różnica iloczynów liczby pierwszej i czwartej oraz drugiej i trzeciej jest równa -2.
4. Wykaż, że liczba 44000 ma 48 dzielników.
5. Uzasadnij, że $\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{48}} = 1$.
6. Wykaż, że $\frac{55552}{55555} < \frac{77774}{77777}$.
7. Wykaż, że liczba $10^n + 10^{n+1} + 10^{n+2}$ jest liczbą podzielną przez 3.
8. Uzasadnij, że suma cyfr liczby $10^{91} - 91$ jest równa 810.
9. Wykaż, że $3^{500} > 5^{300}$.
10. Wykaż, że liczby $11^{\log_7 10}$ i $10^{\log_7 11}$ są równe.
11. Uzasadnij, że liczba $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{98\cdot 100} = \frac{49}{200}$.
12. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 16 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb parzystych jest równa 8.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wykaż, że wyrażenie $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + 2\sqrt{x^2 - 12x + 36}$ ma stałą wartość dla $x \in (-1; 5)$.

2. Wykaż, że jeżeli $a + b = 4,\ a \in R$ i $b \in R$, to $a^2 + b^2 \geq 8$.

3. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x, y, z zachodzi nierówność $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

4. Wykaż, że jeżeli $xy > 0$, to $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$.

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

6. Wykaż, że jeżeli $x + y + z = 0$, to $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

7. Wykaż, że jeżeli $yz \neq 0$ i $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, to $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2} = \frac{x^2}{y^2}$.

8. Udowodnij, że jeżeli liczba $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to liczba $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jest też liczbą całkowitą.

9. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych różnych od zera zachodzi nierówność $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3}$.

10. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z, k prawdziwa jest nierówność $\sqrt{(x + z)(y + k)} \geq \sqrt{xy} + \sqrt{zk}$.

11. Udowodnij, że jeśli dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z spełniony jest warunek $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{3}$, to $x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \leq 1$.

12. Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b i takich, że $a^2 + b^2 = 4$, zachodzi nierówność $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1$.