5 ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

DOWÓD 165 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\frac{0{,}1^{-\log(1+2+3+\ldots+100)}}{50\frac{1}{2}}=\frac{10^{\log\frac{1+100}{\cancel{2}}\cdot\overset{50}{\cancel{100}}}}{\frac{101}{2}}=\frac{10^{\log(101\cdot 50)}}{\frac{101}{2}}=\frac{\cancel{101}\cdot 50}{1}\cdot\frac{2}{\cancel{101}}=100=10^2$$

DOWÓD 166 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L=\frac{1}{\log_x 10}+\frac{2}{\log_x 10}+\frac{3}{\log_x 10}+\ldots+\frac{20}{\log_x 10}=\frac{1}{\log_x 10}\underbrace{(1+2+3+\ldots+20)}_{\substack{S_{20}\\ \text{suma ciągu arytmetycznego}}}=\frac{1}{\log_x 10}\cdot\frac{1+20}{2}\cdot 20=\log_{10}x\cdot 210=$$

$$=210\log x=\log x^{210}=10^{\log_{10}(\log x^{210})}=10^{\log(\log x^{210})}=P$$

DOWÓD 167 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$a_2-a_1=a_3-a_2$$
$$2m-1-m+4=3m+2-2m+1$$
$$m+3=m+3$$
$0=0$ — równanie nieoznaczone, więc $m\in\mathbb{R}$

DOWÓD 168 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Z własności ciągu geometrycznego: $\dfrac{8a-1}{a+3}=\dfrac{21a+3}{8a-1}$.

$$64a^2-8a-8a+1=21a^2+3a+63a+9$$
$$43a^2-82a-8=0$$

$\sqrt{\Delta}=90,\quad a_{1,2}=\dfrac{82\pm 90}{86}=\begin{cases}\nearrow 2\in\mathbb{N}\\ \searrow -\frac{8}{86}\notin\mathbb{N}\end{cases}$

Dla $a=2\in\mathbb{N}$ ciąg (a_n) jest geometryczny.

DOWÓD 169 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Z własności ciągu arytmetycznego: $b+2-a-1=c+3-b-2$, więc $2b=a+c \;\rightarrow\; b=\dfrac{a+c}{2}$.

Z własności ciągu geometrycznego: $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b} \;\rightarrow\; b^2=ac$.

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$$
$$\frac{a^2+2ac+c^2}{4}=ac \quad |\cdot 4$$
$$a^2+2ac+c^2=4ac$$
$$a^2-2ac+c^2=0$$
$$(a-c)^2=0$$
$$a=c$$

$b=\dfrac{a+c}{2} \;\rightarrow\; b=\dfrac{a+a}{2} \;\rightarrow\; b=a$, więc $a=b=c$

DOWÓD 170 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Kolejne wyrazy ciągu: x, $y = xq$, $z = xq^2$.

$$L = \frac{y^2z^2}{x} + \frac{x^2z^2}{y} + \frac{x^2y^2}{z} = \frac{x^{\cancel{2}}q^2 \cdot x^2q^4}{\cancel{x}} + \frac{x^2 \cdot x^{\cancel{2}}q^{\cancel{4}^{3}}}{\cancel{x}\cancel{q}} + \frac{x^2 \cdot x^{\cancel{2}}\cancel{q^2}}{\cancel{x}\cancel{q^2}} = x^3q^6 + x^3q^3 + x^3 = x^3 + (xq)^3 + (xq^2)^3 = x^3 + y^3 + z^3 = P$$

DOWÓD 171 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$a_n = 4n - 3 \quad \rightarrow \quad a_1 = 1$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 4n - 3}{2} \cdot n = \frac{4n - 2}{2} \cdot n = 2n^2 - n$$

DOWÓD 172 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$P = S_{n+1} - S_n = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} \cdot (n+1) - \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1) - (a_1 + a_n)n}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{a_1n} + a_1 + a_{n+1}n + a_{n+1} - \cancel{a_1n} - a_nn}{2} = \frac{a_{n+1}n - a_nn + a_1 + a_{n+1}}{2} = \frac{n\overbrace{(a_{n+1} - a_n)}^{r} + a_1 + a_1 + (n+1-1)r}{2} =$$

$$= \frac{nr + a_1 + a_1 + nr}{2} = \frac{2a_1 + 2nr}{2} = a_1 + nr = a_1 + (n+1-1)r = a_{n+1} = L$$

DOWÓD 173 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Wyznaczamy wzór ogólny ciągu (a_n).

$a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 - [-(n-1)^2] = -n^2 - (-n^2 + 2n - 1) = -n^2 + n^2 - 2n + 1 = -2n + 1$

$a_1 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$

$S_1 = -1$

$a_1 = S_1$

$a_{n+1} - a_n = -2(n+1) + 1 - (-2n + 1) = -2n - 2 + 1 + 2n - 1 = -2 = const$, czyli ciąg jest arytmetyczny.

DOWÓD 174 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+3} - 8 - (2^{n-1+3} - 8) = 2^{n+3} - 8 - 2^{n+2} + 8 = 2^{n+3} - 2^{n+2} = 2^{n+2} \cdot (2-1) = 2^{n+2}$, $a_1 = S_1 = 8$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = 2 = const$, czyli ciąg (a_n) jest geometryczny.

DOWÓD 175 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Ciąg (b_n) jest geometryczny, więc $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, gdzie $q = const$.

Ciąg (a_n) będzie arytmetyczny, jeśli $a_{n+1} - a_n = r$, gdzie $r = const$.

$a_{n+1} - a_n = \log b_{n+1} - \log b_n = \log \frac{b_{n+1}}{b_n} = \log q = const$, więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

DOWÓD 176 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Obliczamy wybrane wyrazy ciągu.

$a_1 = 2 \cdot 1 - 16 = -14$, $a_2 = 2 \cdot 2 - 16 = -12$, $a_3 = 2 \cdot 3 - 16 = -10$, $a_{100} = 2 \cdot 100 - 16 = 184$,

więc $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100} = -14 \cdot (-12) \cdot (-10) \cdot \ldots \cdot 184$

Wszystkie czynniki iloczynu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100}$ są liczbami parzystymi. Jedną z tych liczb jest wyraz $a_8 = 0$, więc $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100} = 0$.

DOWÓD 177 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

k, l, m, n to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, więc zapisujemy zależności: $k = a_1$, $l = a_1 q$, $m = a_1 q^2$, $n = a_1 q^3$.

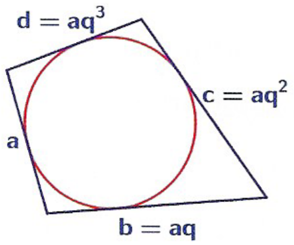
$G(x) = 0$, więc $a_1 x^3 + a_1 q x^2 + a_1 q^2 x + a_1 q^3 = 0 \quad | : a_1 \qquad a_1 \neq 0$

$$x^3 + qx^2 + q^2 x + q^3 = 0$$
$$x^2(x+q) + q^2(x+q) = 0$$
$$(x+q)(x^2+q^2) = 0$$

Czyli $x = -q$, więc jest tylko jedno rozwiązanie.

DOWÓD 178 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$a + c = b + d$, ponieważ czworokąt opisany jest na okręgu



$a + aq^2 = aq + aq^3 \quad |: a$

$1 + q^2 = q + q^3$

$1 + q^2 = q(1+q^2) \quad |:(1+q^2)$

$1 = q$, więc:

$a = a$

$b = aq = a \cdot 1 = a$

$c = aq^2 = a \cdot 1^2 = a$

$d = aq^3 = a \cdot 1^3 = a$

Wszystkie boki czworokąta są równe, więc jest on rombem.