6 ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

DOWÓD 198 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$4a(a+5) \geq 8a-9$$
$$4a^2+20a \geq 8a-9$$
$$4a^2+20a-8a+9 \geq 0$$
$$4a^2+12a+9 \geq 0$$
$$\bigwedge_{a \in \mathbb{R}} (2a+3)^2 \geq 0$$

DOWÓD 199 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\frac{a^2+2}{a} \geq \frac{a+4}{2} \quad \Big| \cdot 2a$$
$$2a^2+4 \geq a^2+4a$$
$$2a^2+4-a^2-4a \geq 0$$
$$a^2-4a+4 \geq 0$$
$$\bigwedge_{a>0} (a-2)^2 \geq 0$$

DOWÓD 200 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$p^2 \leq \frac{p^4+1}{2} \quad \Big| \cdot 2$$
$$2p^2 \leq p^4+1$$
$$p^4-2p^2+1 \geq 0$$
$$\bigwedge_{p \in \mathbb{R}} (p^2-1)^2 \geq 0$$

DOWÓD 201 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\sqrt{a+b} \geq \sqrt{2\sqrt{ab}} \quad \Big|^2$$
$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$$
$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}_+} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

DOWÓD 202 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$k^2m^2+l^2n^2 \leq \sqrt{k^4+l^4} \cdot \sqrt{m^4+n^4} \quad \Big|^2$$
$$k^4m^4+2k^2m^2l^2n^2+l^4n^4 \leq (k^4+l^4)(m^4+n^4)$$
$$\cancel{k^4m^4}+2k^2m^2l^2n^2+\cancel{l^4n^4} \leq \cancel{k^4m^4}+k^4n^4+l^4m^4+\cancel{l^4n^4}$$
$$-k^4n^4+2k^2m^2l^2n^2-l^4m^4 \leq 0 \quad \Big| \cdot(-1)$$
$$k^4n^4-2k^2m^2l^2n^2+l^4m^4 \geq 0$$
$$\bigwedge_{k,l,m,n \in \mathbb{R}_+} (k^2n^2-l^2m^2)^2 \geq 0$$

DOWÓD 203 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\sqrt[6]{\frac{a^6+b^6}{2}} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \quad \Big|^6$$

$$\frac{a^6+b^6}{2} \geq \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^6+b^6}{2} \geq \frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{4} \quad \Big| \cdot 4$$

$$2a^6+2b^6 \geq a^6+2a^3b^3+b^6$$

$$a^6-2a^3b^3+b^6 \geq 0$$

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} (a^3-b^3)^2 \geq 0$$

DOWÓD 204 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$10x^2+6xy+2y^2 \geq 0$$

$$x^2+\underbrace{9x^2+6xy+y^2}+y^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+\underbrace{(3x+y)^2}_{\geq 0}+\underbrace{y^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 0$$

DOWÓD 205 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$a^2+b^2-4a+2b+6>0$$

$$\underbrace{a^2-4a+4}+\underbrace{b^2+2b+1}+1>0$$

$$\underbrace{\underbrace{(a-2)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(b+1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{1}_{>0}}_{>0}>0$$

DOWÓD 206 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$x^2+y^2 \geq xy$$

$$x^2+y^2-xy \geq 0 \quad \Big| \cdot 2$$

$$2x^2+2y^2-2xy \geq 0$$

$$x^2+\underbrace{x^2-2xy+y^2}_{(x-y)^2}+y^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}+\underbrace{y^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 0$$

DOWÓD 207 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$x^6+x^4+2x^3+x^2+2>0$$

$$\underbrace{x^6+2x^3+1}+x^4+x^2+1>0$$

$$\underbrace{\underbrace{(x^3+1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{x^4}_{\geq 0}+\underbrace{x^2}_{\geq 0}+\underbrace{1}_{>0}}_{>0}>0$$

DOWÓD 208 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$a^3+8b^3 \geq 2a^2b+4ab^2$$

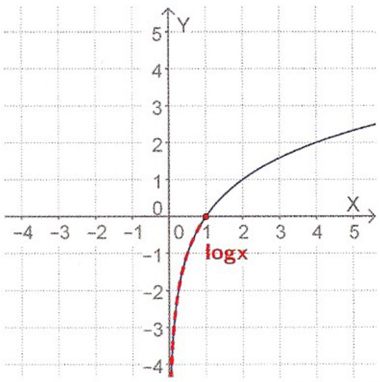
$$(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)-2ab(a+2b) \geq 0$$

$$(a+2b)(a^2-4ab+4b^2)\geq 0$$
$$\underbrace{\underbrace{(a+2b)}_{\geq 0}\underbrace{(a-2b)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}\geq 0$$

DOWÓD 209 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Przekształcamy nierówność tak, aby przedstawić ją w postaci kwadratu dwóch liczb.

UWAGA! Wyrażenie $\log x$ dla $x\in(0;1)$ jest liczbą ujemną.



$$8(1+2\log_x 10)\leq \log\frac{1}{x}$$
$$8+16\log_x 10\leq -\log x$$
$$8+16\log_x 10+\log x\leq 0$$
$$8+\frac{16}{\log x}+\log x\leq 0 \quad \Big|\cdot\log x$$
$$8\log x+16+\log^2 x\geq 0$$
$$\log^2 x+8\log x+16\geq 0$$
$$\bigwedge_{x\in(0;1)}(\log x+4)^2\geq 0$$

DOWÓD 210 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$xy=2 \quad\rightarrow\quad y=\frac{2}{x}$$
$$L=(x+1)(y+2)=\underbrace{xy}_{2}+2x+y+2=4+2x+y=4+2x+\frac{2}{x}=4+2\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\geq 2}\geq 8=P$$

DOWÓD 211 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L=\frac{a}{b}\left(1+\frac{a}{b}\right)+\frac{b}{a}\left(1+\frac{b}{a}\right)=\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}=\underbrace{\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}}_{\geq 2}}_{\geq 4}\geq 4=P$$

DOWÓD 212 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L=\frac{2ab}{c}+\frac{2bc}{a}+\frac{2ac}{b}=\frac{ab}{c}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ac}{b}=\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=$$
$$=a\underbrace{\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)}_{\geq 2}+b\underbrace{\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)}_{\geq 2}+c\underbrace{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}_{\geq 2}\geq 2a+2b+2c=P$$

DOWÓD 213 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9 \quad \Big|\cdot(a+b+c)$$
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\cdot\underbrace{(a+b+c)}_{1}$$
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

DOWÓD 213 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 3 + \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{a}{c} + \frac{c}{a}}_{\geq 2} \geq 9 = P$$

DOWÓD 214 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L = \frac{\overbrace{(a+b)}^{\geq 2\sqrt{ab}}\overbrace{(b+c)}^{\geq 2\sqrt{bc}}\overbrace{(c+d)}^{\geq 2\sqrt{cd}}\overbrace{(a+d)}^{\geq 2\sqrt{ad}}\overbrace{(a+c)}^{\geq 2\sqrt{ac}}\overbrace{(b+d)}^{\geq 2\sqrt{bd}}}{\sqrt{abcd}} \geq \frac{64\sqrt{a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot d \cdot a \cdot d \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d}}{\sqrt{abcd}} = \frac{64\sqrt{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot d^3}}{\sqrt{abcd}} =$$

$$= \frac{64abcd\cancel{\sqrt{abcd}}}{\cancel{\sqrt{abcd}}} = P$$

więc $L \geq P$

DOWÓD 215 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \quad |\cdot 2$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$L = \underbrace{a^2 + b^2}_{\geq 2ab} + \underbrace{a^2 + c^2}_{\geq 2ac} + \underbrace{b^2 + c^2}_{\geq 2bc} \geq 2ab + 2ac + 2bc = P$$

DOWÓD 216 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Sprawdzamy, czy $a^2 - ab + b^2 > 0$:

$$a^2 - ab + b^2 > 0 \quad |\cdot 2$$

$$2a^2 - 2ab + 2b^2 > 0$$

$$a^2 + \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{(a-b)^2} + b^2 > 0$$

$$a^2 + (a-b)^2 + b^2 > 0$$

Wyrażenie jest dodatnie dla $a \neq b$

Przekształcamy nierówność:

$$\frac{2a^2 + 3ab + 5b^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 1 \quad |\cdot(a^2 - ab + b^2)$$

$$2a^2 + 3ab + 5b^2 \geq a^2 - ab + b^2$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2 \geq 0$$

$$\bigwedge_{a \neq b} (a + 2b)^2 \geq 0$$