7 ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

DOWÓD 229 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \frac{2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha(\sin^2\alpha + 1)} = \frac{2\overbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}^{1}}{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1} + \cos^2\alpha} = \frac{2}{\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}} = 2 = P$$

DOWÓD 230 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 3$$

$$\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = 3$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$$

DOWÓD 231 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\operatorname{tg}\alpha = 3 \;\rightarrow\; \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3 \;\rightarrow\; \sin\alpha = 3\cos\alpha$$

$$L = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{3\cos\alpha - \cos\alpha}{3\cos\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\cancel{\cos\alpha}}{4\cancel{\cos\alpha}} = \frac{1}{2} = P$$

DOWÓD 232 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \frac{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - 1}{\operatorname{tg}^3\alpha \cdot \operatorname{tg}^3\beta + 1} = \frac{2\sin^2\alpha + 2\sin^2(90 - \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^3\alpha \cdot \operatorname{tg}^3(90 - \alpha) + 1} = \frac{2\overbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}^{1} - 1}{\underbrace{(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha)^3}_{1} + 1} = \frac{2 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = P$$

DOWÓD 233 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \frac{(\sin 72^\circ \cos 27^\circ - \cos 72^\circ \sin 27^\circ)^2}{(\cos 61^\circ \cos 16^\circ + \sin 61^\circ \sin 16^\circ) \cdot \sin 45^\circ} = \frac{[\sin(72^\circ - 27^\circ)]^2}{[\cos(61^\circ - 16^\circ)] \cdot \sin 45^\circ} = \frac{\sin^2 45^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \cancel{\sin 45^\circ}} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 = P$$

DOWÓD 234 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$L = \frac{(2\sin^2 40^\circ + 2\sin^2 50^\circ)(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ) \cdot \sin 20^\circ}{\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ} = \frac{2(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ) \cdot \cos(2 \cdot 10^\circ) \cdot \sin 20^\circ}{\cos(2 \cdot 20^\circ)} =$$

$$= \frac{2\overbrace{(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)}^{1} \cdot \cos 20^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{2\cos 20^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin(2 \cdot 20^\circ)}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \operatorname{tg} 40^\circ = P$$

DOWÓD 235 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Założenie: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$

$$L = (1 + \sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{1}{\cos\alpha} - \cancel{\operatorname{tg}\alpha} + \cancel{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} - \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\overbrace{1-\sin^2\alpha}^{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} = \cos\alpha = P$$

DOWÓD 236 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L = \frac{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha-3\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{\cancel{2}\cos 4\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{2}\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}} = \frac{\cos 4\alpha}{\sin\alpha} = P$$

DOWÓD 237 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$L = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha\right)^2 = 1 - 2\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2} = \frac{2-\sin^2 2\alpha}{2} = P$$

DOWÓD 238 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$P = \frac{2 - \sin 2x\cdot\operatorname{ctg}x}{2\cos x} = \frac{2 - 2\cancel{\sin x}\cos x\cdot\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}}{2\cos x} = \frac{\cancel{2}(1-\cos^2 x)}{\cancel{2}\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\sin x = \operatorname{tg}x\cdot\sin x = L$$

DOWÓD 239 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Korzystamy ze wzoru: $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ i przedstawiamy wyrażenie w następujący sposób:

$$L = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 45^\circ + \sin^2 46^\circ + \sin^2 47^\circ + \ldots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ =$$

$$= \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 45^\circ + \cos^2 44^\circ + \cos^2 43^\circ + \ldots + \cos^2 1^\circ + \sin^2 90^\circ =$$

$$= \underbrace{\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ}_{1} + \underbrace{\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ}_{1} + \ldots + \underbrace{\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ}_{1} + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{44\ razy} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 44 + \frac{1}{2} + 1 = 45\frac{1}{2} = \frac{91}{2} = P$$

DOWÓD 240 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$$|\cos\alpha - \sin\alpha| = \sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{2}{3} \quad \Big|^2$$

$$\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{4}{9}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{5}{9}$$

$$\sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{1 + \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$