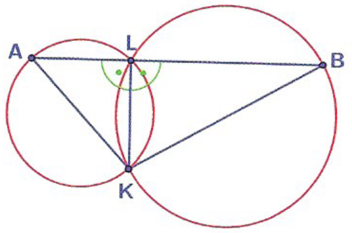
8 ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

DOWÓD 269 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Kąty ALK i BLK są proste, ponieważ oparte są na średnicach okręgów, więc $|\sphericalangle ALB| = 180^\circ$. Wynika z tego, że punkty A, L, B są współliniowe, ponieważ kąt ALB jest kątem półpełnym.



DOWÓD 270 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

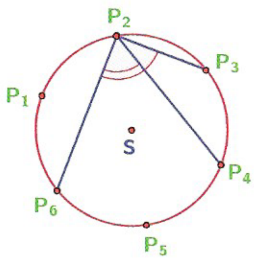
$|\sphericalangle P_6SP_4| = \frac{2}{6} \cdot 360^\circ = 120^\circ$,

więc $|\sphericalangle P_6P_2P_4| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle P_6SP_4| = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

$|\sphericalangle P_4SP_3| = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$,

więc $|\sphericalangle P_4P_2P_3| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle P_4SP_3| = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$

Zatem $|\sphericalangle P_6P_2P_4| = 2|\sphericalangle P_4P_2P_3|$.



DOWÓD 271 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Kąt wpisany $K_{13}K_3K_{10}$ jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego $K_{13}AK_{10}$, który oparty jest na trzech łukach z piętnastu. Obliczamy jego wartość:

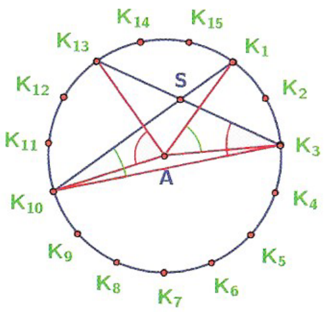
$|\sphericalangle K_{13}AK_{10}| = \frac{3}{15} \cdot 360^\circ = 72^\circ$, więc $|\sphericalangle K_{13}K_3K_{10}| = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$

Analogicznie kąt wpisany $K_1K_{10}K_3$ jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego K_1AK_3, który oparty jest na dwóch łukach z piętnastu. Obliczamy jego wartość:

$|\sphericalangle K_1AK_3| = \frac{2}{15} \cdot 360^\circ = 48^\circ$, więc $|\sphericalangle K_1K_{10}K_3| = \frac{1}{2} \cdot 48^\circ = 24^\circ$.

Obliczamy wartość kąta K_3SK_{10}, wiedząc, że suma kątów w trójkącie wynosi 180°:

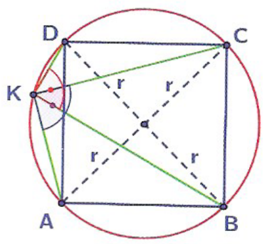
$|\sphericalangle K_3SK_{10}| = 180^\circ - 36^\circ - 24^\circ = 120^\circ$



DOWÓD 272 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

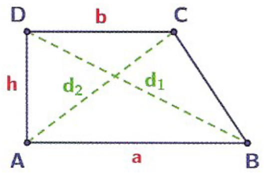
Kąty AKC i BKD są kątami prostymi, ponieważ są oparte na średnicy okręgu.

Z twierdzenia Pitagorasa: $|AK|^2 + |CK|^2 = 4r^2$ oraz $|BK|^2 + |DK|^2 = 4r^2$, więc $|AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2 = 8r^2$.



DOWÓD 273 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Niech: $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = h$, $|DB| = d_1$, $|AC| = d_2$



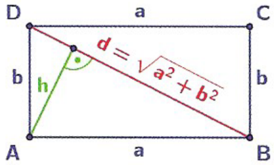
Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy układ równań. Równania odejmujemy stronami.

$$-\begin{cases} h^2 + a^2 = d_1^2 \\ h^2 + b^2 = d_2^2 \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = d_1^2 - d_2^2$$

DOWÓD 274 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Z twierdzenia Pitagorasa:



$d^2 = a^2 + b^2$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ze wzorów na pole trójkąta:

$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ab$

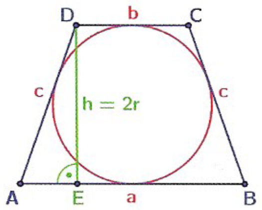
$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot h$

$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot h = \frac{1}{2}ab$

$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

DOWÓD 275 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Skoro trapez jest opisany na okręgu, to:



$2c = a + b \quad \rightarrow \quad c = \frac{a+b}{2}$

Z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle AED$:

$|AE|^2 + |ED|^2 = |AD|^2$, gdzie $|AE| = \frac{a-b}{2}$

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2r)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

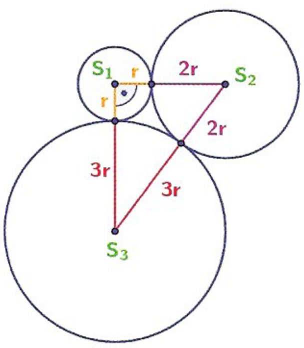
$4r^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$

$4r^2 = ab \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, więc

$P_K = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\right)^2 = \frac{ab}{4}\pi$

DOWÓD 276 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Niech: $|S_1S_2| = 3r$, $|S_1S_3| = 4r$, $|S_2S_3| = 5r$



Korzystamy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

$|S_1S_2|^2 + |S_1S_3|^2 = |S_2S_3|^2$

$(3r)^2 + (4r)^2 = (5r)^2$

$9r^2 + 16r^2 = 25r^2$

$25r^2 = 25r^2$

$L = P$, więc trójkąt $S_1S_2S_3$ jest prostokątny.

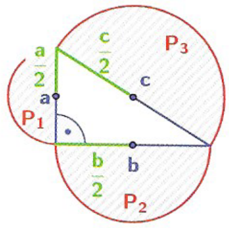
DOWÓD 277 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Z twierdzenia Pitagorasa: $c^2 = a^2 + b^2$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi = \frac{a^2}{8}\pi + \frac{b^2}{8}\pi = (a^2+b^2)\frac{\pi}{8}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi = c^2\frac{\pi}{8} = (a^2+b^2)\frac{\pi}{8},$$

więc $P_1 + P_2 = P_3$



DOWÓD 278 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

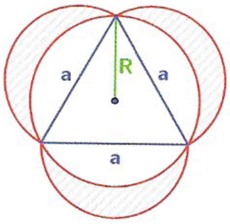
$$P_K = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \pi R^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\pi + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\pi + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{3}a^2\pi =$$

$$= \frac{9}{24}a^2\pi - \frac{8}{24}a^2\pi + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{24}a^2\pi > \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$, czyli suma pól księżyców Hipokratesa jest większa od pola trójkąta.



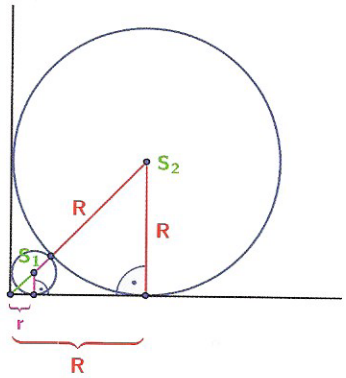
DOWÓD 279 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Niech: R — promień większego okręgu,
r — promień mniejszego okręgu.

$$R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + R$$

$$R(\sqrt{2}-1) = r(\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$$



DOWÓD 280 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

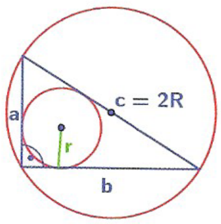
$r = \dfrac{a+b-c}{2}$, gdzie $r = \dfrac{1}{2}R$, $c = 2R$

$$\frac{1}{2}R = \frac{a+b-2R}{2} \quad \Big|\cdot 2$$

$$R = a + b - 2R$$

$$3R = a + b \quad \Big|:3$$

$$R = \frac{a+b}{3}$$



DOWÓD 281 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

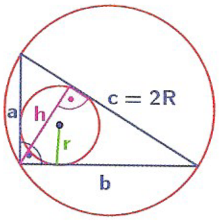
Niech: a, b — przyprostokątne; c — przeciwprostokątna;
h — wysokość trójkąta oparta na boku c

$P_\triangle = pr$, gdzie $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$c = 2R$ i $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ $\quad\rightarrow\quad$ $r = \dfrac{a+b-2R}{2} \quad \Big|\cdot 2$

$$2r = a + b - 2R$$

$$a + b = 2r + 2R$$



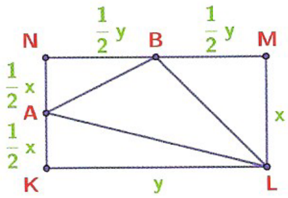
$$P_{\triangle} = pr = \frac{2r + 2R + 2R}{2} \cdot r = (r + 2R)r = 2Rr + r^2$$

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}2Rh = Rh$$

$Rh = 2Rr + r^2$, więc $h = \dfrac{2Rr + r^2}{R}$

DOWÓD 282 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Niech: $|KN| = |LM| = x$ i $|KL| = |NM| = y$



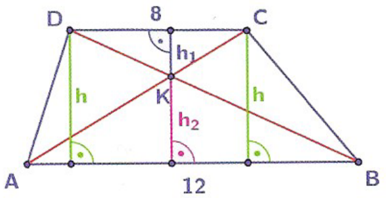
$$P_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}xy, \quad P_{\triangle BLM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}y \cdot x = \frac{1}{4}xy, \quad P_{\triangle AKL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot y = \frac{1}{4}xy$$

$$P_{\triangle ABL} = xy - \left(\frac{1}{8}xy + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}xy\right) = xy - \left(\frac{1}{8}xy + \frac{2}{8}xy + \frac{2}{8}xy\right) = xy - \frac{5}{8}xy = \frac{3xy}{8}$$

$P_{\triangle ABN} + P_{\triangle BLM} = \frac{1}{8}xy + \frac{1}{4}xy = \frac{3}{8}xy$, zatem $P_{\triangle ABL} = P_{\triangle ABN} + P_{\triangle BLM}$

DOWÓD 283 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$P_{\triangle CDK} = 16$, więc $16 = \dfrac{8 \cdot h_1}{2} \quad \rightarrow \quad h_1 = 4$



$\triangle ABK \sim \triangle CDK$ (cecha kąt-kąt, ponieważ $\sphericalangle CKD$ i $\sphericalangle AKB$ są wierzchołkowe, a $\sphericalangle CDK$ i $\sphericalangle ABK$ są naprzemianległe),

więc $\dfrac{8}{4} = \dfrac{12}{h_2} \quad \rightarrow \quad h_2 = 6$

$$h = h_1 + h_2 = 4 + 6 = 10$$

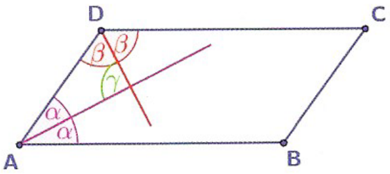
$$P_{\triangle ADK} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 60 - 36 = 24$$

$$P_{\triangle BKC} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 60 - 36 = 24,$$

więc trójkąty ADK i BKC mają równe pola o wartości 24.

DOWÓD 284 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Z sumy kątów przy jednym ramieniu równoległoboku:



$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

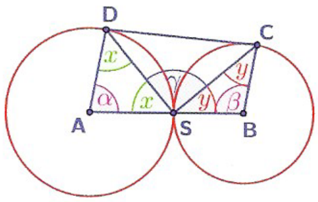
Z sumy kątów w trójkącie:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$90^\circ + \gamma = 180^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,$$

więc dwusieczne te są prostopadłe.

DOWÓD 285 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Niech: $|\sphericalangle DSC| = \gamma$, $|\sphericalangle DAS| = \alpha$ i $|\sphericalangle SBC| = \beta$.



Jeśli α i β są kątami leżącymi przy jednym z ramion trapezu, to:

$\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha$.

Niech: $|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle ADS| = x$ oraz $|\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle BCS| = y$.

Z sumy kątów w trójkącie:

$\alpha + 2x = 180^\circ \rightarrow x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\beta + 2y = 180^\circ$

$180^\circ - \alpha + 2y = 180^\circ$

$2y = \alpha \rightarrow y = \frac{\alpha}{2}$

$\gamma + x + y = 180^\circ$, ponieważ kąty γ, x, y tworzą łącznie kąt półpełny.

$\gamma = 180^\circ - x - y$

$\gamma = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$

DOWÓD 286 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

$|\sphericalangle DBE| = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 150^\circ$

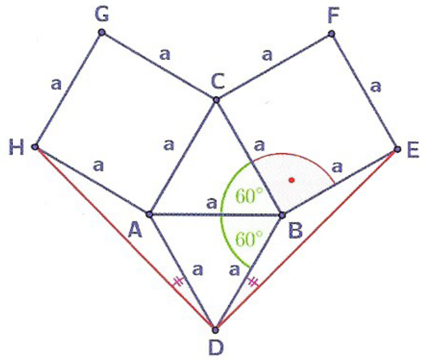
$|\sphericalangle BDE| = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$

$|\sphericalangle HDA| = |\sphericalangle BDE| = 15^\circ$

$|\sphericalangle ADB| = 60^\circ$,

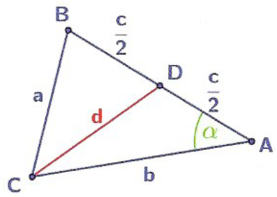
czyli $|\sphericalangle HDE| = |\sphericalangle HDA| + |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDE| =$

$= 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$



DOWÓD 287 **PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE**

Z twierdzenia cosinusów w $\triangle ABC$ wyznaczamy $\cos\alpha$:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Z twierdzenia cosinusów w $\triangle CDA$:

$$d^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot b\cdot\cos\alpha$$

$$d^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - \cancel{2}\cdot\frac{\cancel{c}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{b}\cdot\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cancel{b}\cancel{c}}$$

$$d^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$d^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}$$

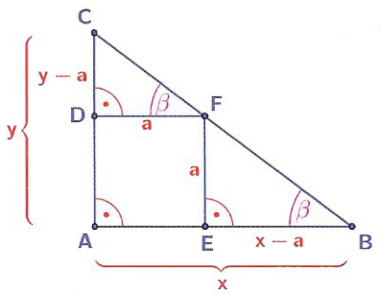
$$d = \frac{\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}$$

DOWÓD 288 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DFC|$, ponieważ są to kąty odpowiadające.

$\triangle ABC \sim \triangle DFC$ (cecha kąt-kąt), więc:

$$\frac{y-a}{a} = \frac{y}{x}$$
$$ay = x(y-a)$$
$$ay = xy - xa$$
$$ay + xa = xy$$
$$a(x+y) = xy$$
$$a = \frac{xy}{x+y}$$



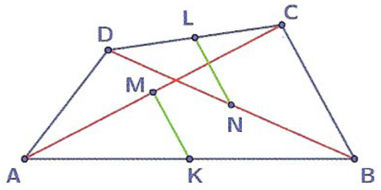
DOWÓD 289 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa:

$\frac{|DN|}{|DL|} = \frac{|NB|}{|LC|}$, więc $NL \parallel BC$

$\frac{|AK|}{|AM|} = \frac{|KB|}{|MC|}$, więc $MK \parallel BC$

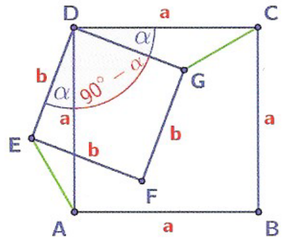
Jeśli $NL \parallel BC$ i $MK \parallel BC$, to $NL \parallel MK$.



DOWÓD 290 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Jeśli $|\sphericalangle EDA| = \alpha$, to $|\sphericalangle ADG| = 90^\circ - \alpha$, więc $|\sphericalangle GDC| = \alpha$.

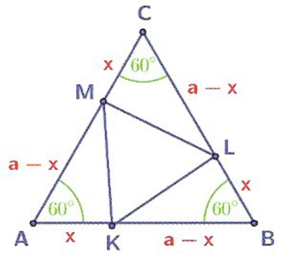
$\triangle EDA \equiv \triangle DGC$ na mocy cechy *bkb*, ponieważ w obu trójkątach występują boki o długościach a i b oraz kąt α, więc $|EA| = |GC|$.



DOWÓD 291 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Na mocy cechy *bkb* (patrz zaznaczone zależności na rysunku obok):

$\triangle AKM \equiv \triangle KBL \equiv \triangle LCM$, więc $|KL| = |LM| = |MK|$, czyli $\triangle KLM$ jest równoboczny.



DOWÓD 292 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Z sumy kątów przy jednym ramieniu równoległoboku:

$\alpha + \beta = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \beta = 180^\circ - \alpha$

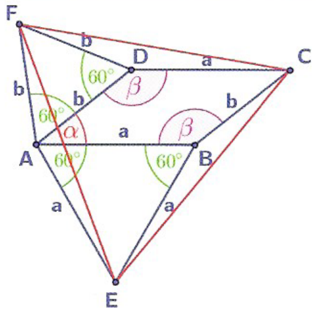
$|\sphericalangle EAF| = 60^\circ + \alpha + 60^\circ = \alpha + 120^\circ$

$|\sphericalangle EBC| = 360^\circ - (60^\circ + \beta) = 360^\circ - (60^\circ + 180^\circ - \alpha) =$

$= 360^\circ - 240^\circ + \alpha = \alpha + 120^\circ$

$|\sphericalangle FDC| = 360^\circ - (60^\circ + \beta) = 360^\circ - (60^\circ + 180^\circ - \alpha) =$

$= 360^\circ - 240^\circ + \alpha = \alpha + 120^\circ$,

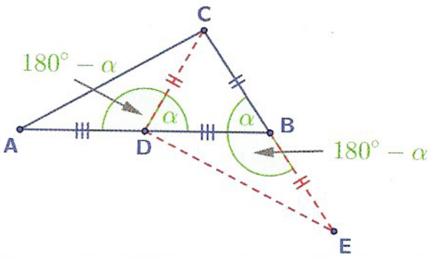


więc $\triangle EAF \equiv \triangle EBC \equiv \triangle FDC$ na mocy cechy *bkb*, czyli $|EC| = |CF| = |EF|$. Wynika z tego, że $\triangle ECF$ jest równoboczny.

DOWÓD 293 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Na mocy cechy *bkb* (patrz zaznaczone zależności na rysunku obok):

$\triangle ADC \equiv \triangle DBE$, więc $|AC| = |DE|$.



DOWÓD 294 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

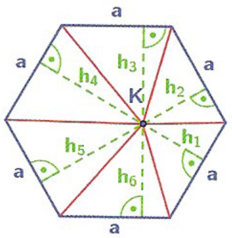
Niech: $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$ — wysokości trójkątów, na które podzielono sześciokąt.

$P_{sz} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 =$

$= \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 + \frac{1}{2}ah_4 + \frac{1}{2}ah_5 + \frac{1}{2}ah_6$, więc

$\frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} \quad \Big| : \frac{1}{2}a$

$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 3\sqrt{3}\,a$



DOWÓD 295 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Wprowadzamy oznaczenia i zależności między nimi jak na rysunku. Trójkąt *ADE* jest trójkątem równoramiennym, gdzie podstawa

$|AE| = a + p$, więc $|AF| = |FE| = \frac{a+p}{2}$, a $|FC| = \frac{a+p}{2} - p$

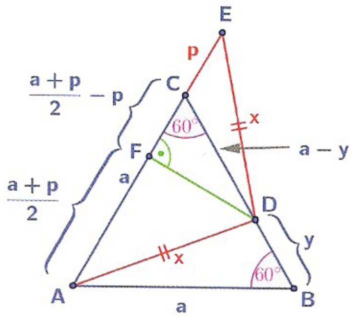
$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a+p}{2} - p}{a - y} = \frac{1}{2}$

$\cancel{a} + p - 2p = \cancel{a} - y$

$-p = -y$

$p = y$,

więc $|BD| = |CE|$



DOWÓD 296 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

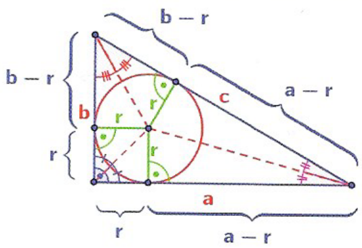
Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych jego kątów, więc możemy oznaczyć poszczególne odcinki, korzystając z podobieństwa trójkątów.

Możemy zauważyć, że:

$c = a - r + b - r$

$2r = a + b - c$

$r = \frac{a + b - c}{2}$



DOWÓD 297 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

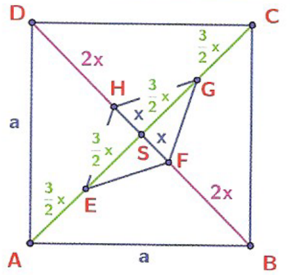
Przyjmując oznaczenia z rysunku, otrzymujemy:

$6x = a\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a = 3\sqrt{2}\,x$

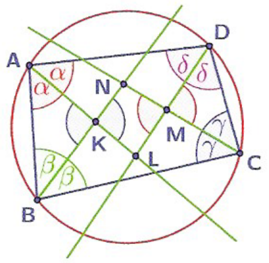
$P_{ABCD} = a^2 = (3\sqrt{2}\,x)^2 = 18x^2$

$P_{EFGH} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{2x \cdot 3x}{2} = \frac{6x^2}{2} = 3x^2$,

więc $P_{ABCD} = 6P_{EFGH}$



DOWÓD 298 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE



Przyjmując oznaczenia z rysunku, otrzymujemy:
$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$, więc $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$

$|\sphericalangle AKB| = 180^\circ - \alpha - \beta$, więc $|\sphericalangle LKN| = 180^\circ - \alpha - \beta$

$|\sphericalangle CMD| = 180^\circ - \gamma - \delta$, więc $|\sphericalangle LMN| = 180^\circ - \gamma - \delta$

$|\sphericalangle LKN| + |\sphericalangle LMN| = 180^\circ - \alpha - \beta + 180^\circ - \gamma - \delta =$

$= 360^\circ - \overbrace{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}^{180^\circ} = 180^\circ$

Kąty *LKN* i *LMN* są naprzeciwległymi kątami czworokąta *KLMN*, a ich suma wynosi 180°. Na czworokącie tym można więc opisać okrąg.