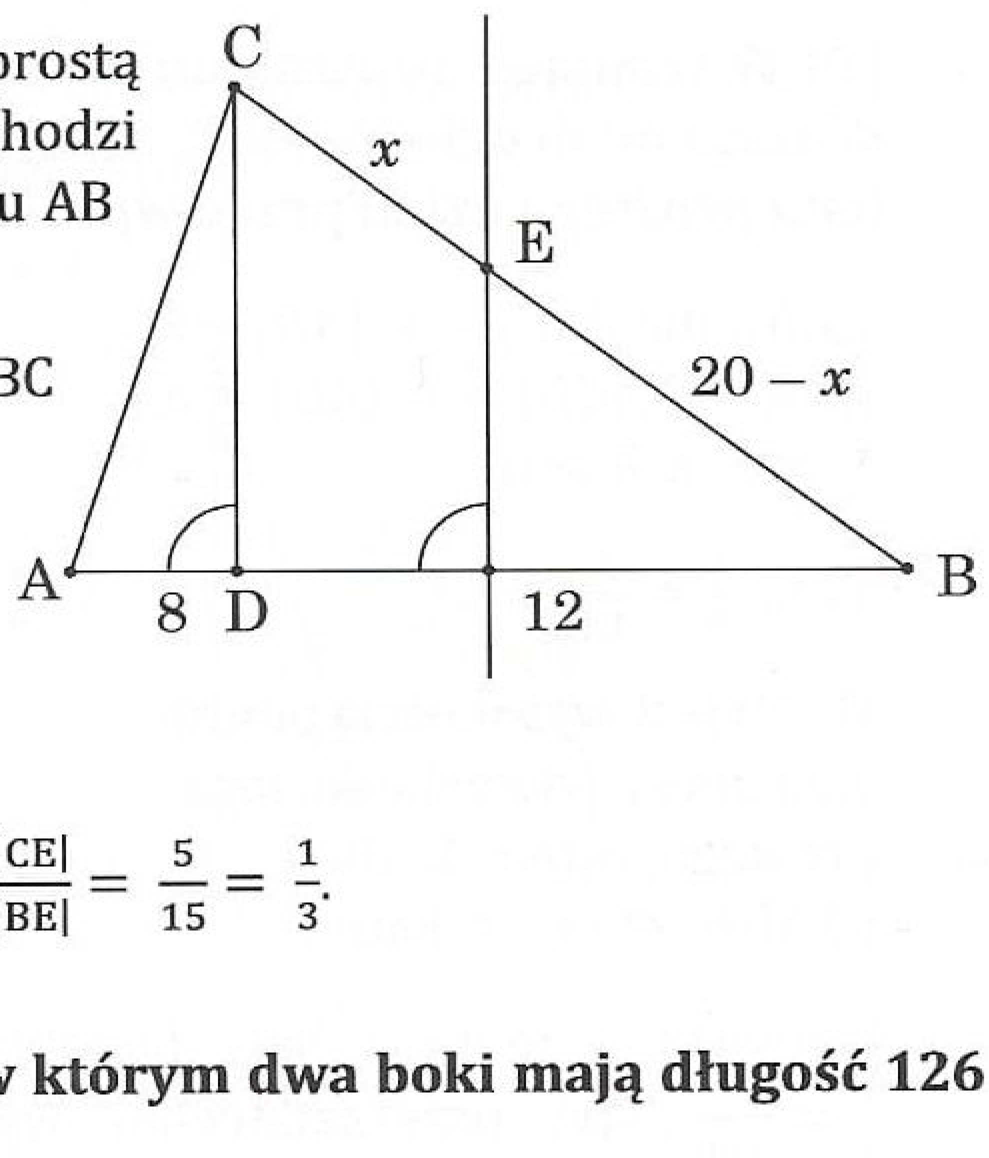
PLANIMETRIA

1. **(P) W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki |AD|=8 cm i |BD|=16 cm, bok BC ma długość 20 cm. Uzasadnij, że symetralna boku AB podzieli boki BC w stosunku 1:3.**

D: Symetralna boku trójkąta jest prostą prostopadłą do tego boku i przechodzi przez jego środek. Symetralna boku AB jest równoległa do wysokości CD.



Na podstawie cechy *kkk* trójkąty DBC i FBE są podobne, zatem:

$\frac{12}{20-x} = \frac{16}{20} \Leftrightarrow \frac{12}{20-x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 60 =$

$= 80 - 4x \Leftrightarrow x = 5.$

$|CD| = 5$cm, $|BE| = 15$, wobec tego $\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

2. **(P) Uzasadnij, że pole trójkąta, w którym dwa boki mają długość 126 i 32, jest nie większe od 2016.**

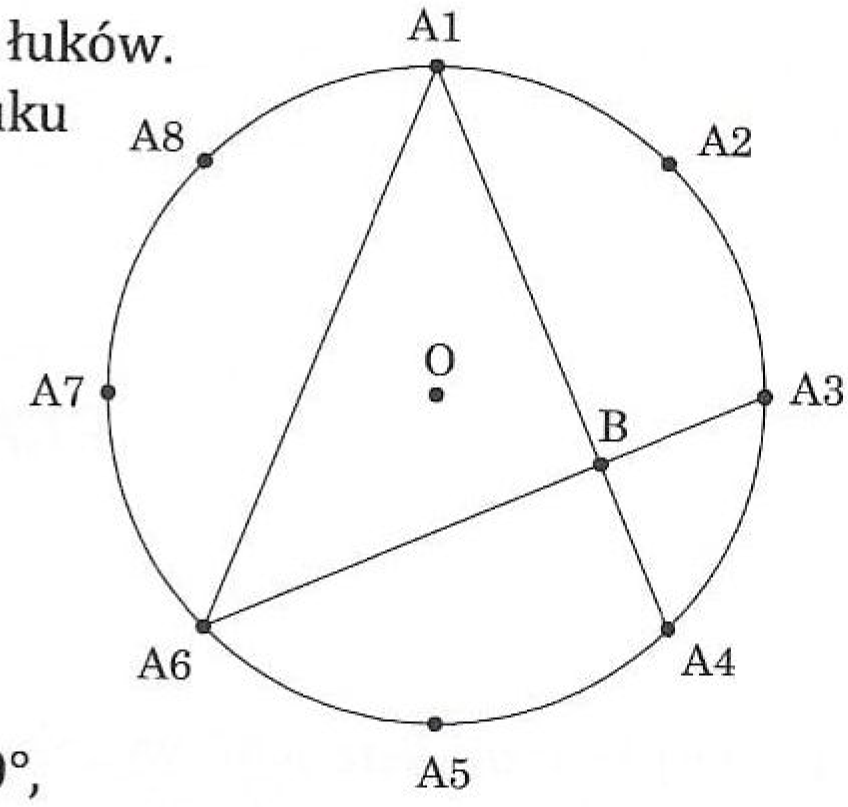
D: Korzystając z wzoru na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$, gdzie α jest kątem między dwoma bokami trójkąta, otrzymamy:

$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 126 \cdot 32 \cdot \sin\alpha = 2016 \sin\alpha.$

Zauważmy, że $0 < \sin\alpha \leq 1$, zatem pole trójkąta nie przekroczy liczby 2016.

3. **(P) Punkty $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ dzielą okrąg na 8 równych łuków, gdzie punkt B jest punktem przecięcia się cięciw A_1A_4 i A_3A_6. Udowodnij, że ΔA_1BA_6 jest prostokątny.**

D: Sporządźmy rysunek i wprowadźmy oznaczenia.



Okrąg podzielono na osiem równych łuków. Kąt wpisany $A_1A_6A_3$ opiera się na łuku A_1A_3, zatem

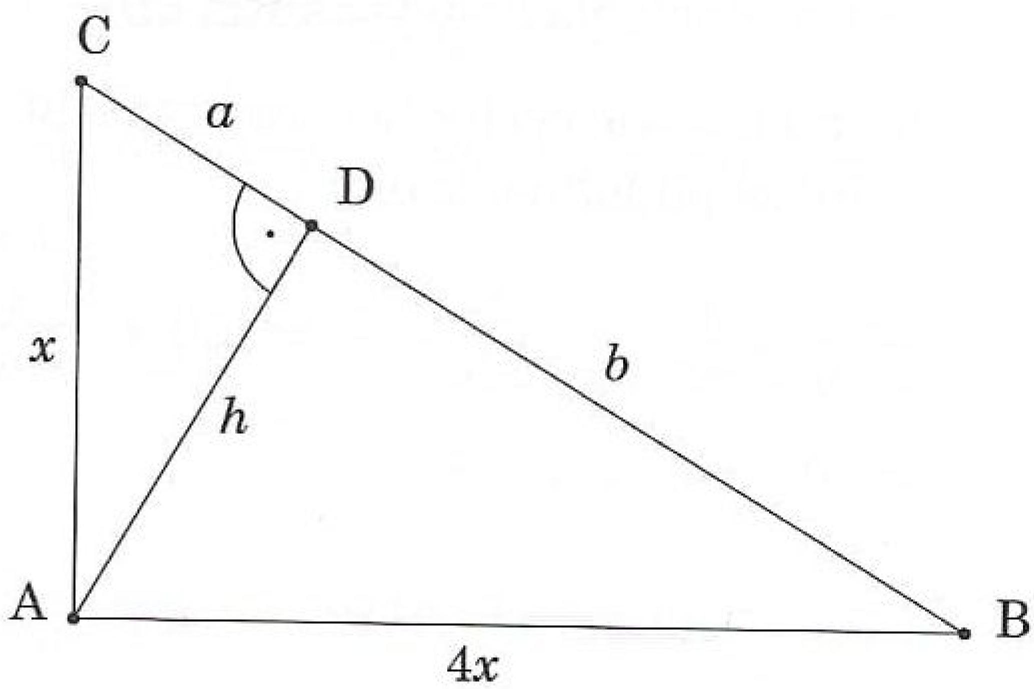
$|\sphericalangle A_1A_6A_3| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \cdot 360° = 45°$.

Kąt $A_4A_1A_6$ jest kątem wpisanym opartym na łuku A_4A_6, wobec tego

$|\sphericalangle A_4A_1A_6| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \cdot 360° = 45°$.

Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°, zatem $|\sphericalangle A_1BA_6| = 180° - (45° + 45°) = 90°$.

4. (P) W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest 4 razy dłuższa od drugiej. Wykaż, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku 1:16.



Założenia: $|AC| = x, |AB| = 4x$, $|BD| = b, |CD| = a, |AD| = h$, $x > 0,\ a, b > 0$

Teza: $\frac{a}{b} = \frac{1}{16}$.

D: AD jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego, zatem ΔADC i ΔADB są prostokątne.

Zauważmy, że ΔADC jest podobny do ΔCAB na podstawie *kkk*, więc $\frac{a}{x} = \frac{x}{a+b}$, po przekształceniu wyrażenia otrzymujemy $x^2 = a(a+b)$. Zauważmy też, że ΔBDA jest podobny do ΔBAC (*kkk*), zatem $\frac{b}{4x} = \frac{4x}{a+b}$, po przekształceniu wyrażenia otrzymujemy $16x^2 = b(a+b)$.

$\begin{cases} x^2 = a(a+b) \\ 16x^2 = b(a+b) \end{cases}$, dzieląc stronami wyrażenie, otrzymujemy

$\frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{x^2}{16x^2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{16}$.

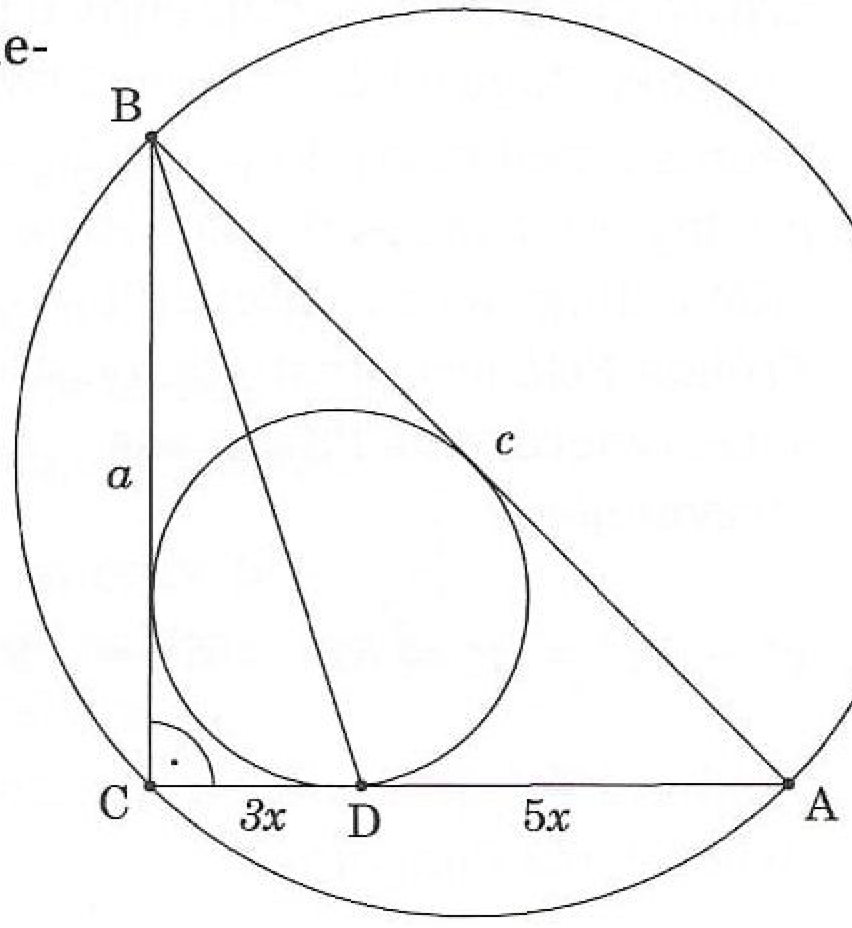
5. (R) W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli bok przeciwległy temu kątowi w stosunku 3:5. Wykaż, że stosunek

długości promienia okręgu wpisanego r w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego R na tym trójkącie jest równy $\frac{2}{5}$.

Założenie: $x > 0, a > 0, c > 0, r > 0, R > 0$

Teza: $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$.

D: W zadaniu dana jest dwusieczna kąta, która dzieli przeciwległy bok w pewnym stosunku, dlatego należy skorzystać z własności dwusiecznej kąta i zapisać $\frac{3x}{5x} = \frac{a}{c}$, zatem $c = \frac{5}{3}a$.
Z założenia ΔABC jest prostokątny, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można zapisać $a^2 + (8x)^2 = (\frac{5}{3}a)^2$.
Po przekształceniu wyrażenia otrzymujemy $64x^2 = \frac{16}{9}a^2$, obustronnie pierwiastkując $8x = \frac{4}{3}a$.
W trójkącie prostokątnym ABC długości boków są równe: $|AB| = \frac{5}{3}a$, $|BC| = a$, $|AC| = \frac{4}{3}a$. Korzystając z własności promienia okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie prostokątnym:



$r = \frac{a+b-c}{2}$,

$R = \frac{1}{2}c$, mamy:

$r = \frac{a+\frac{4}{3}a-\frac{5}{3}a}{2} = \frac{\frac{2}{3}a}{2} = \frac{2}{6}a$,

$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}a = \frac{5}{6}a$,

zatem: $\frac{r}{R} = \frac{\frac{2}{6}a}{\frac{5}{6}a} = \frac{2}{5}$, $x, a, c > 0$.

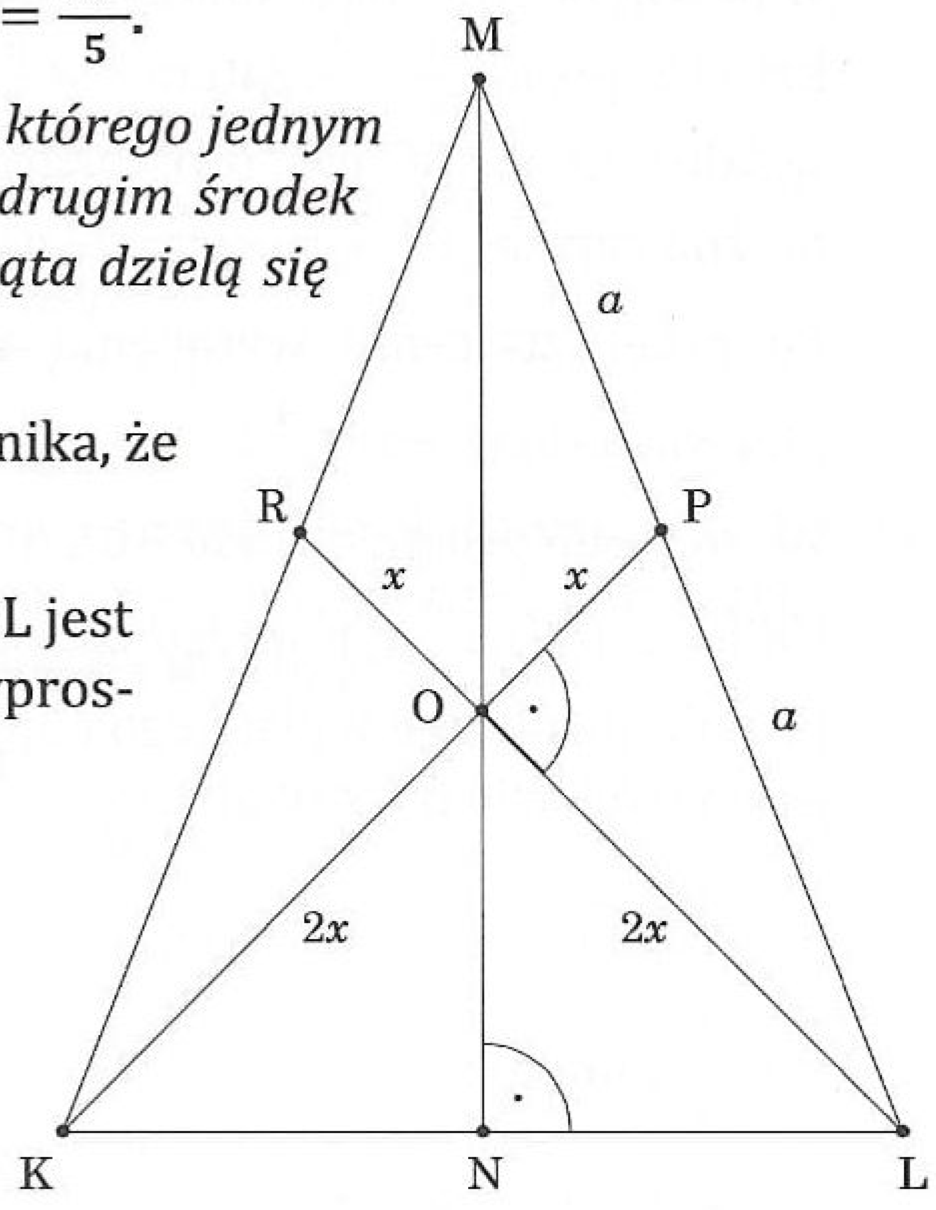
6. **(P) W trójkącie prostokątnym promień okręgu wpisanego ma długość r, zaś promień okręgu na nim opisanego ma długość R. Wykaż, że pole tego trójkąta jest równe $P = 2Rr + r^2$.**

Założenie: a, b – długości przyprostokątnych
c – długość przeciwprostokątnej
r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny
R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym.

Teza: $P = 2Rr + r^2$

D: Zauważmy, że $c = 2R$ oraz $2R = b - r + a - r$, zatem $2R + 2r = a + b$.
$P_\Delta = \frac{1}{2}r(a + b + c) = \frac{1}{2}r(2R + 2r + 2R) = 2Rr + r^2$.

7. (P) W trójkącie KLM, w którym |KM|=|LM|=$2a$, środkowe poprowadzone z wierzchołków K i L przecinają się pod kątem prostym. Wykaż, że pole ΔKLM jest równe $P = \frac{6a^2}{5}$.



D: *Środkowa trójkąta jest odcinkiem, którego jednym końcem jest wierzchołek trójkąta, a drugim środek przeciwległego boku. Środkowe trójkąta dzielą się w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka.*

Z własności środkowych trójkąta wynika, że |KO|=|LO|=$2x$.

Z warunków zadania wynika, że ΔKOL jest prostokątny i równoramienny o przyprostokątnej długości $2x$, zatem (z twierdzenia Pitagorasa) |KL|=$2x\sqrt{2}$.
Punkty P i R są środkami boków ML i KM o długości $2a$, zatem |PL|=a.
Trójkąt POL jest prostokątny, stosując twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy:

$$x^2 + 4x^2 = a^2 \Rightarrow 5x^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{5}x = a \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Trójkąt MNL jest także trójkątem prostokątnym, więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

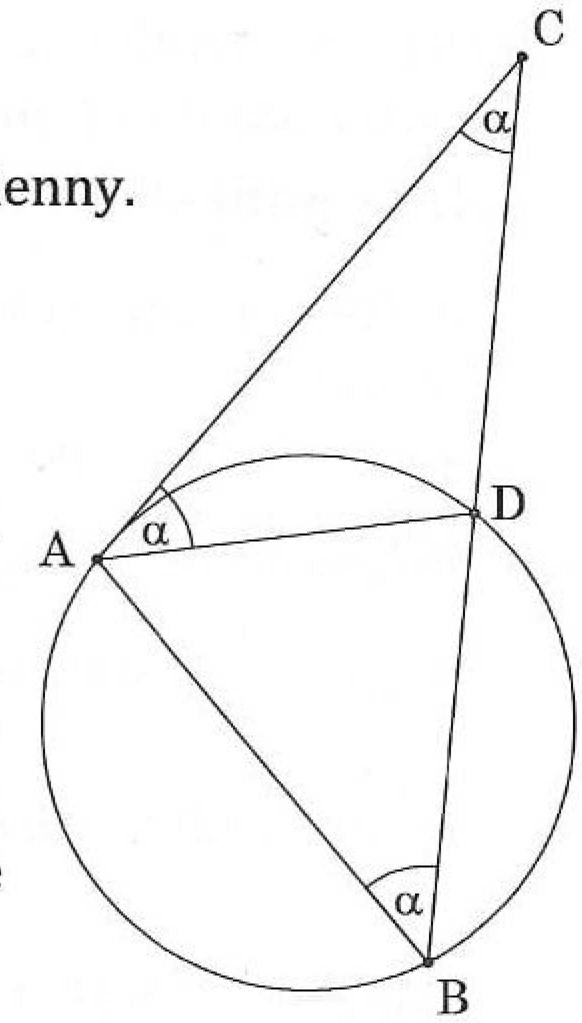
$$|MN|^2 = 4a^2 - \left(x\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow |MN|^2 = 4a^2 - \frac{2a^2}{5} \Rightarrow |MN| = \frac{3a\sqrt{10}}{5}.$$

$$P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |KL| = \frac{3a\sqrt{10}}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a^2 \cdot 10}{25} = \frac{6a^2}{5}.$$

8. (P) Dany jest trójkąt ABC. Okrąg przechodzący przez punkty A i B jest styczny do prostej AC w punkcie A i przecina bok BC w punkcie D. Wykaż, że jeśli |AD|=|CD|, to trójkąt ABC jest równoramienny.

D: *Aby wykazać, że trójkąt jest równoramienny, należy udowodnić, że długości dwóch boków są równe lub dwa kąty mają taką samą miarę.*

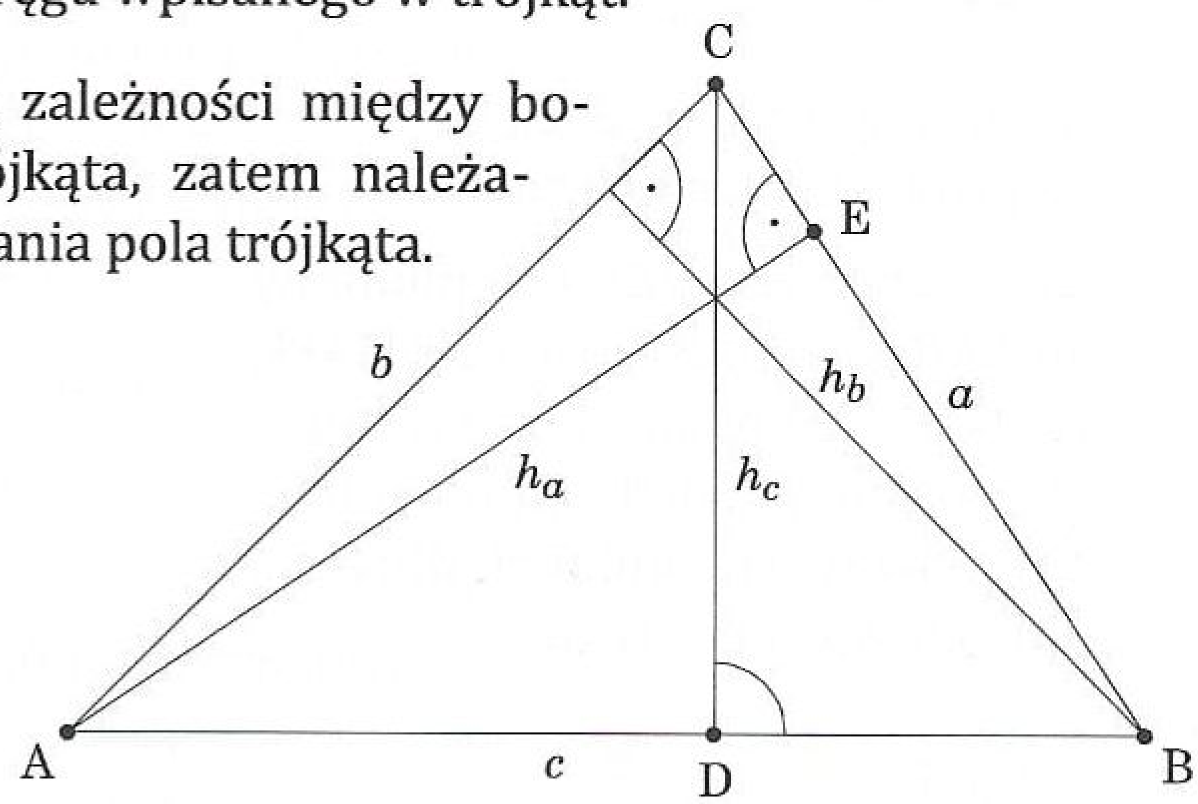
Przy założeniu, że |AD|=|CD|, ΔADC jest równoramienny.
Z własności trójkąta równoramiennego wynika, że |<DAC|=|<DCA|= α.
Znajdźmy związek między kątami.



Kąt DAC jest kątem dopisanym opartym na łuku AD, zaś kąt ABD jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku, zatem |∢ABC|= α (*miara kąta dopisanego jest równa mierze kąta wpisanego opartego na tym samym łuku*). W trójkącie ABC miary dwóch kątów są równe, z tego wynika, że ΔABC jest równoramienny.

9. (R) Wykaż, że jeśli h_a, h_b, h_c są długościami wysokości trójkąta o bokach a, b, c, zaś r jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

Założenie: a, b, c – długości boków trójkąta,
h_a – wysokość poprowadzona na bok a,
h_b – wysokość poprowadzona na bok b,
h_c – wysokość poprowadzona na bok c,
r – promień okręgu wpisanego w trójkąt.



D: W zadaniu występują zależności między bokami i wysokościami trójkąta, zatem należałoby skorzystać z porównania pola trójkąta.

Zauważmy, że

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a=$

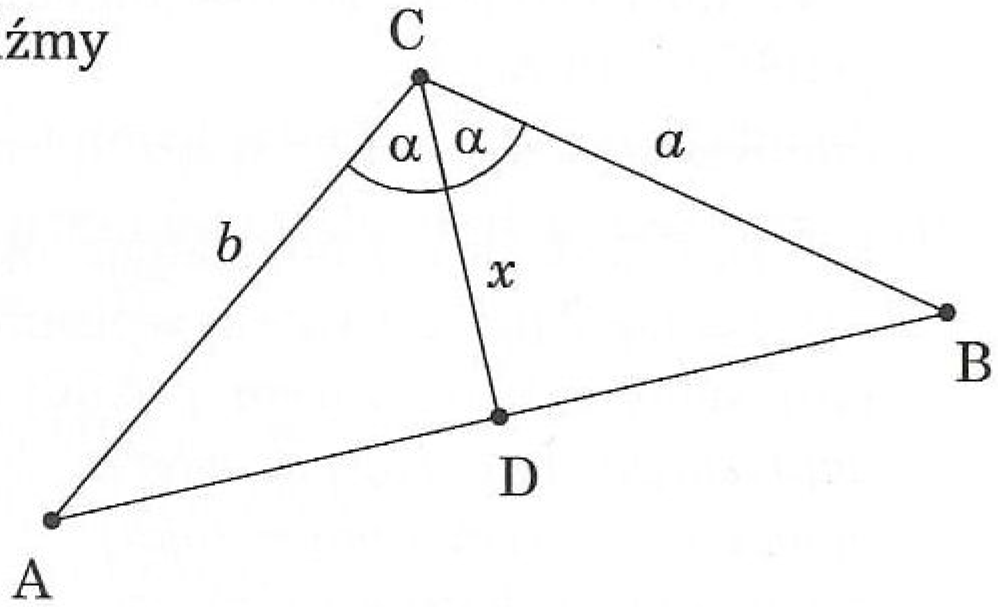
$=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ oraz

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr,$

zatem $\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc.$
Stąd: $ah_a=ra+rb+rc.$
Podzielmy obie strony równania przez ah_ar i otrzymamy:
$\frac{1}{r}=\frac{a}{ah_a}+\frac{b}{ah_a}+\frac{c}{ah_a}$, zatem $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$

10. (R) W trójkącie ABC, w którym $|AC| = b, |BC| = a$ i $|\sphericalangle ACB| = \alpha$ z wierzchołka C poprowadzono dwusieczną kąta, która przecięła bok AB w punkcie D. Wykaż, że $|CD| = \frac{2ab\cos\alpha}{a+b}$.

D: Sporządźmy rysunek i wprowadźmy oznaczenia.



Skorzystajmy z porównania pól trójkątów:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin(2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

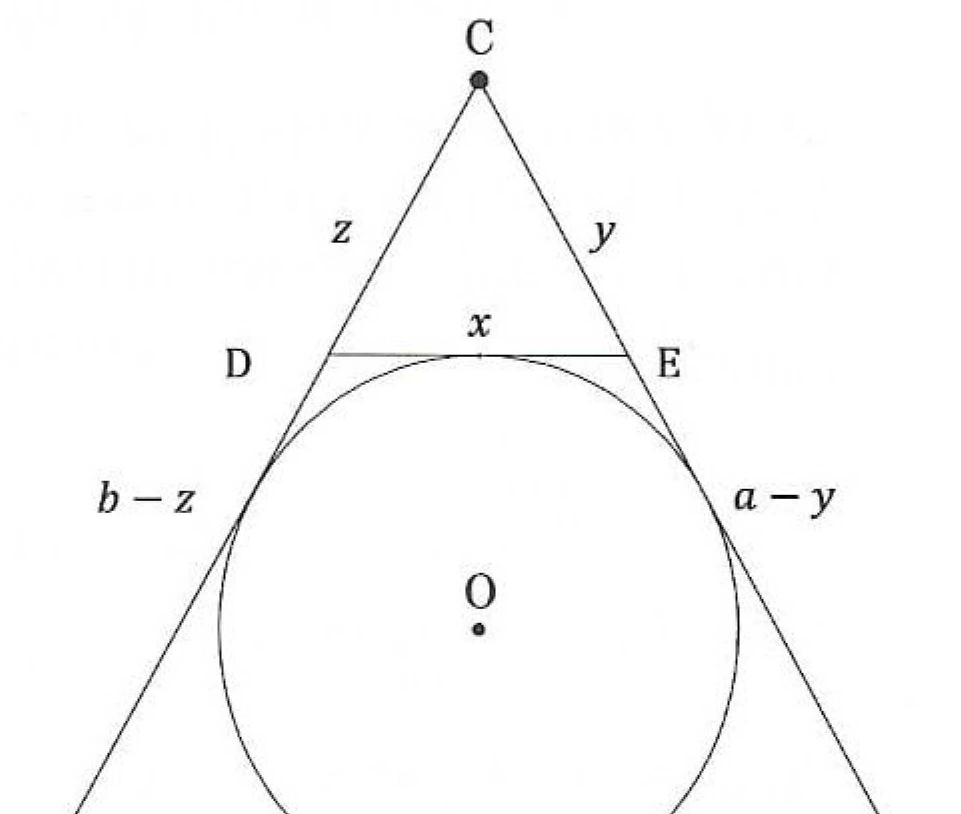
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bx\sin\alpha + \frac{1}{2}ax\sin\alpha = \frac{1}{2}(a+b)x\sin\alpha.$$

Z powyższego wynika, że

$\frac{1}{2}ab \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}(a+b)x\sin\alpha \Rightarrow x = \frac{2ab\cos\alpha}{a+b}$.

11. (R) W trójkąt, którego boki mają długości a, b, c, wpisano okrąg i następnie poprowadzono styczną do tego okręgu równoległą do boku o długości c, nie zawierającą tego boku. Wykaż, że długość odcinka będącego częścią wspólną poprowadzonej stycznej i trójkąta ma długość $x = \frac{c(a+b-c)}{a+b+c}$.

D: Sporządźmy rysunek i wprowadźmy oznaczenia.



Zauważmy, że ΔDEC jest podobny do ΔABC na podstawie cechy *kkk*. Z tego wynika, że stosunek długości odpowiednich odcinków jest równy stosunkowi długości obwodów, wobec tego:

$\frac{x}{c} = \frac{z+x+y}{a+b+c}$.

Z założenia okrąg jest wpisany w czworokąt $ABED$.

Z własności: *okrąg jest wpisany w czworokąt, gdy suma długości przeciwległych boków jest równa,* mamy:

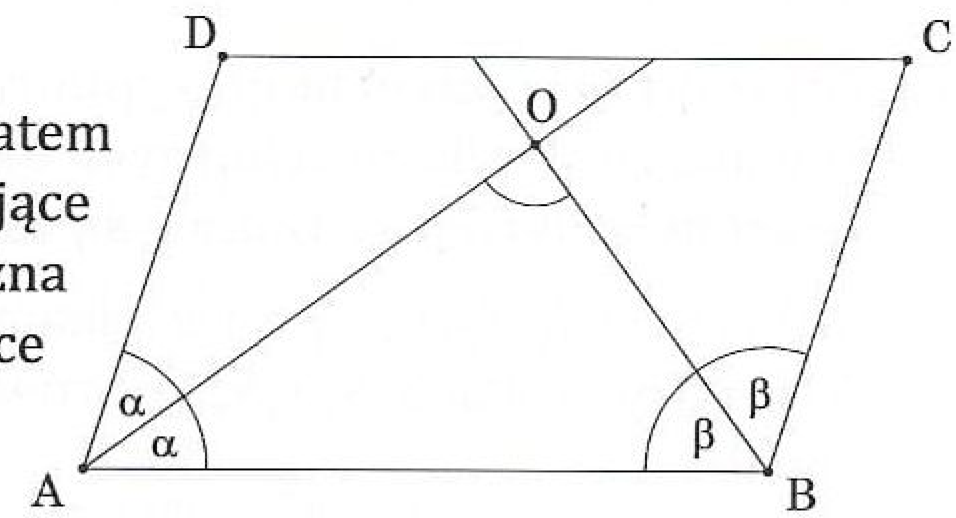
$c + x = a - y + b - z.$

Uwzględniając oba warunki, otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = a + b - c - y - z \\ \frac{x}{c} = \frac{z+x+y}{a+b+c} \end{cases} \Leftrightarrow \ \frac{x}{c} = \frac{a+b-c-y-z+z+y}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{x}{c} = \frac{a+b-c}{a+b+c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{c(a+b-c)}{a+b+c}.$$

12. (P) Wykaż, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.

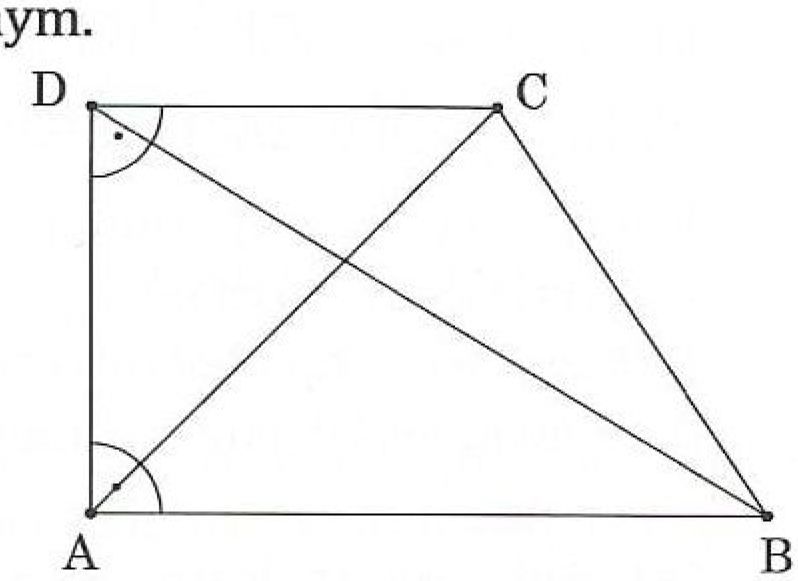


D: AO jest dwusieczną kąta BAD, zatem dzieli go na dwa kąty przystające o mierze α, analogicznie dwusieczna BO dzieli kąt na dwa kąty przystające o mierze β.

Korzystając z własności: *suma miar kątów sąsiednich w równoległoboku jest równa* 180°, wynika, że $2\alpha+2\beta = 180^\circ$, zatem że $\alpha+\beta = 90^\circ$.
W ΔAOB suma miar kątów jest równa 180°, więc $\alpha+\beta+|\sphericalangle AOB| = 180^\circ$, to $|\sphericalangle AOB| = 90^\circ$.

13. (P) Wykaż, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów długości przekątnych jest równa różnicy kwadratów długości podstaw.

Założenie: ABCD jest trapezem prostokątnym.
Teza: $|BD|^2 - |AC|^2 = |AB|^2 - |CD|^2$.



D: ABCD jest trapezem prostokątnym, to ΔBAD i ΔADC są prostokątne.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa

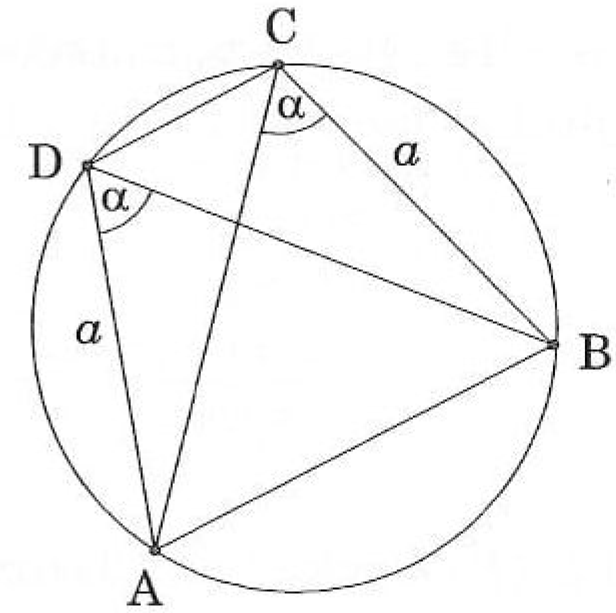
$$\begin{cases} |BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 \\ |AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 \end{cases},$$

odejmując równania stronami, otrzymamy:
$|BD|^2 - |AC|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - |AD|^2 - |CD|^2$,
zatem $|BD|^2 - |AC|^2 = |AB|^2 - |CD|^2$.

14. (P) Wykaż, że jeżeli czworokąt wpisany w okrąg ma jedną parę boków przeciwległych równych, to przekątne tego czworokąta są równe.

Założenie: $|AD| = |BC|$ i czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg
Teza: $|AC| = |BD|$

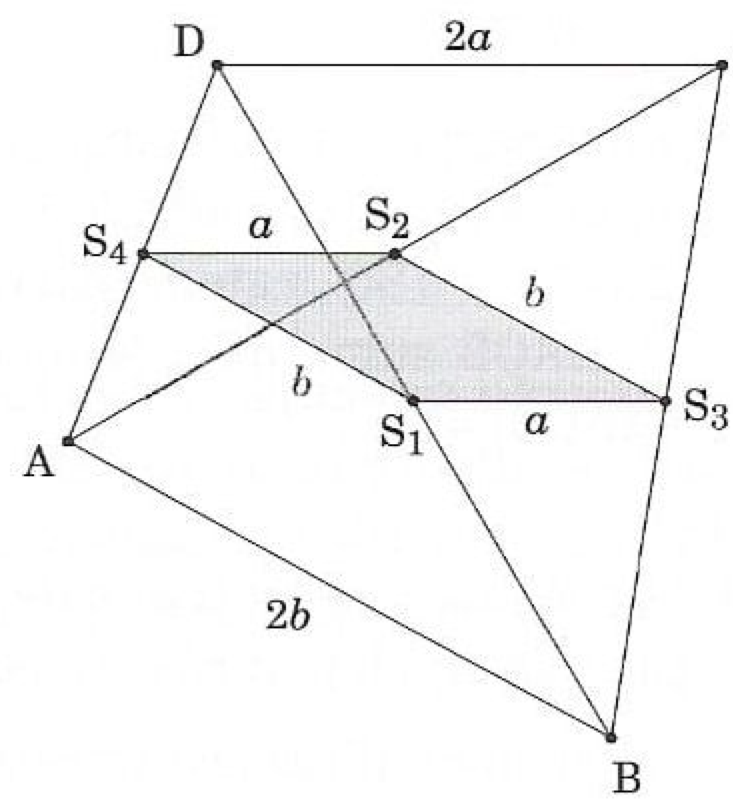
D: Kąty ADB i ACB to kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku AB. Korzystając z własności: *kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary,* bok AB jest bokiem wspólnym obu trójkątów i z założenia $|AD| = |BC|$ zauważamy, że trójkąty ADB i ACB są przystające na podstawie cechy *bkb,* zatem $|AC| = |BD|$.



15. (P) Dany jest czworokąt wypukły.
Wykaż, że środki przekątnych tego czworokąta i środki dwóch przeciwległych jego boków są wierzchołkami równoległoboku.

Założenie: S_1, S_2, S_3, S_4 są środkami boków trójkąta.
Teza: Czworokąt $S_1S_2S_3S_4$ jest równoległobokiem.

D: W zadaniu należy znaleźć związek między odcinkami łączącymi środki boków trójkąta, zatem należy wykorzystać własność: *odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku trójkąta i jest równy połowie jego długości.*



S_1 jest środkiem BD, S_3 jest środkiem BC, korzystając z powyższej własności możemy zapisać $|S_1S_3| = \frac{1}{2}|CD|$ w ΔBCD oraz $|S_2S_4| = \frac{1}{2}|CD|$ w ΔACD, zatem $|S_1S_3|=|S_4S_2|$ i $S_1S_3 || S_2S_4$.
Korzystając z tej samej własności w ΔABC i ΔABD, można zapisać $|S_1S_4|=|S_2S_3|$ i $S_1S_4 || S_2S_3$.
Jeśli w czworokącie przeciwległe boki są tej samej długości, to ten czworokąt jest równoległobokiem, zatem $S_1S_2S_3S_4$ jest równoległobokiem.

16. (P) Pole prostokąta, którego przekątna ma długość 6 cm, wynosi $9\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. Uzasadnij, że tangens kąta ostrego zawartego między przekątnymi jest równy 1.

D: Skorzystaj ze wzoru na pole prostokąta, gdy dana jest jego przekątna.

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin\alpha = 18\sin\alpha \\ P = 9\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 18\sin\alpha = 9\sqrt{2}$$

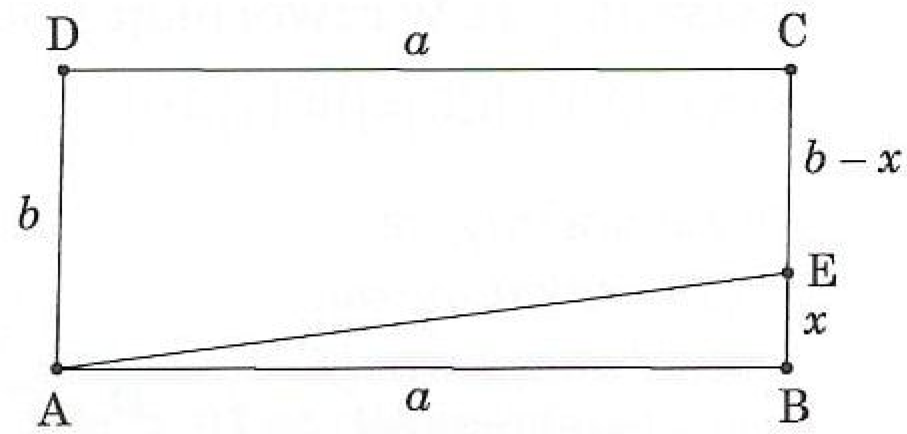
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha \in (0°, 90°)$, to $\alpha = 45°$, $\text{tg}45° = 1$.

17. (P) W prostokącie $ABCD$ o bokach długości $|AB| = a$ i $|BC| = b$, z punktu A poprowadzono na bok BC odcinek AE tak, że pole trapezu $AECD$ jest 5 razy większe od pola trójkąta ABE. Wykaż, że punkt E podzielił odcinek BC w stosunku 1:2.

D: Sporządźmy rysunek i wprowadźmy oznaczenia:

$P_{ADCE} = \frac{1}{2}(b + b - x)a = \frac{1}{2}(2b - x)a,$

$P_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}ax.$



Z warunków zadania wynika, że $P_{ADCE} = 5 \cdot P_{\Delta ABE}$, wobec tego

$\frac{1}{2}a(2b - x) = \frac{1}{2}ax \cdot 5$

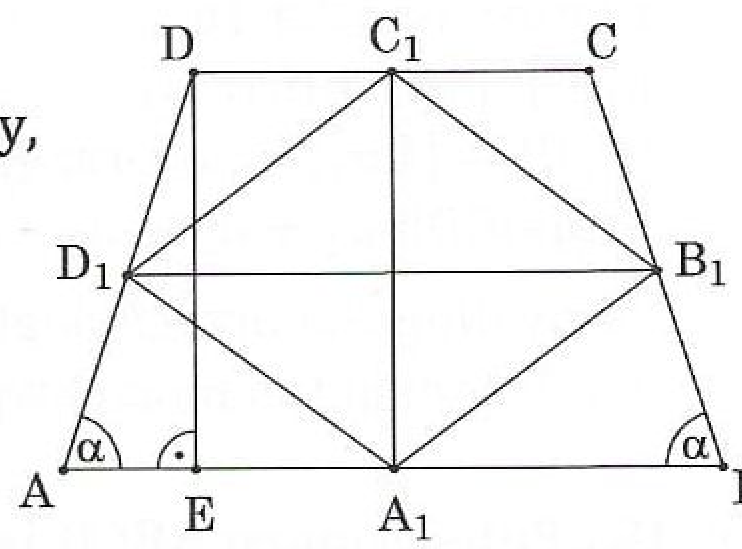
$2b - x = 5x$

$x = \frac{1}{3}b$, zatem $b - x = \frac{2}{3}b$, wobec tego $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{\frac{1}{3}b}{\frac{2}{3}b} = \frac{1}{2}.$

18. (P) W trapezie równoramiennym $ABCD$, którego podstawy mają długości $|AB|=a$ i $|CD|=b$ $(a > b)$ i kąt ostry ma miarę α, połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Wykaż, że pole otrzymanego czworokąta jest równe $P = \frac{a^2-b^2}{8}\text{tg}\alpha$.

Założenie: Trapez ABCD jest równoramienny,
$|AB|=a$, $|CD|=b$, $\alpha \epsilon (0°, 90°)$.

Teza: $P = \frac{a^2-b^2}{8} tg\alpha.$



D: Z założenia punkty A_1, B_1, C_1, D_1 są środkami boków trapezu. Korzystając z własności w trapezie: odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie sumy długości jego podstaw mamy $|B_1D_1|=\frac{1}{2}(a + b)$.

Z warunku, że trapez ABCD jest równoramienny mamy $|AE| = \frac{a-b}{2}$.

W trójkącie prostokątnym AED wyznaczymy tg α = $\frac{|A_1C_1|}{\frac{a-b}{2}}$, zatem

$|A_1C_1| = \frac{a-b}{2} \cdot tg\alpha.$

Zauważmy, że $B_1D_1 || AB$ i $A_1C_1 \perp AB$, to DE$\perp$ B_1D_1, zatem przekątne czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ są prostopadłe i dzielą się na połowy.

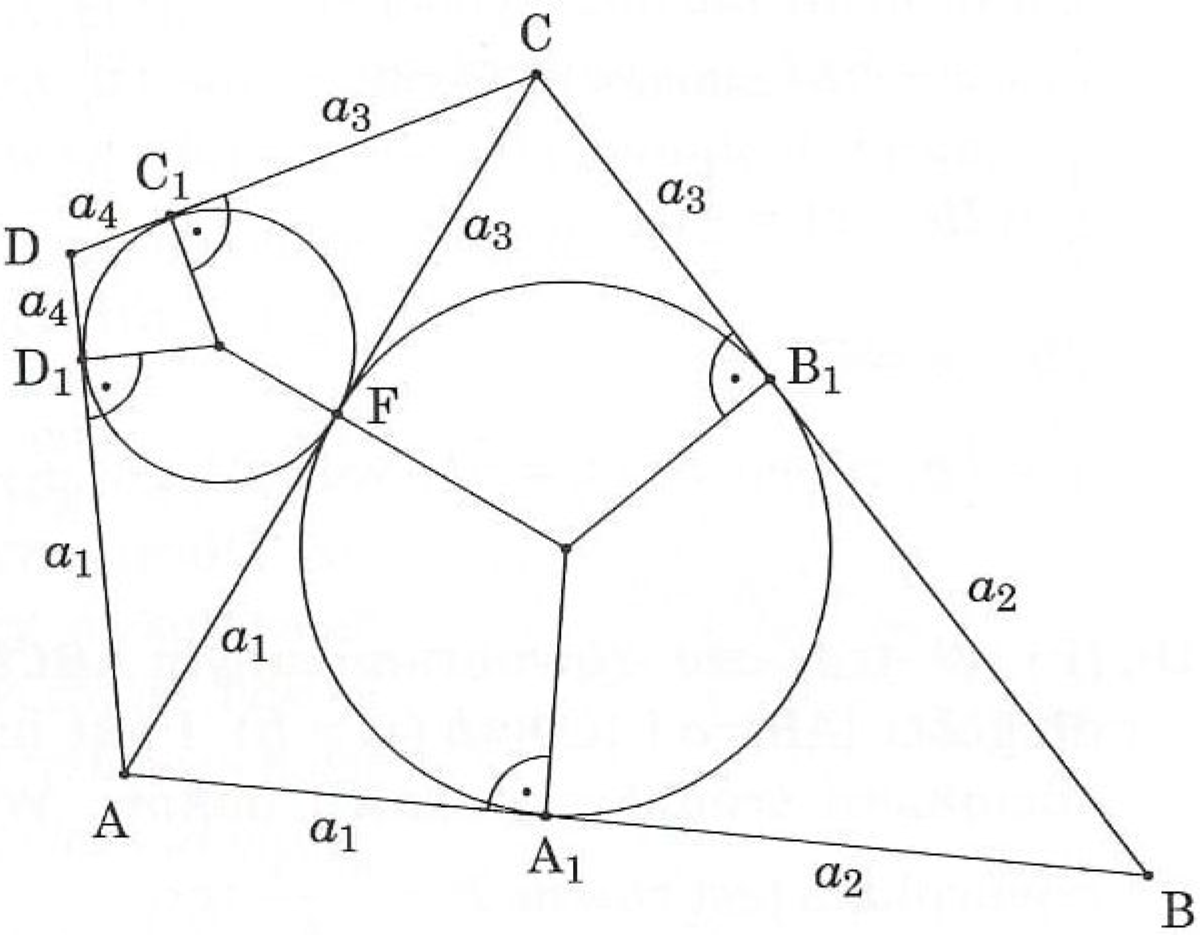
Z tego wynika, że $A_1B_1C_1D_1$ jest rombem, wobec tego pole czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ jest równe

$$P=\frac{1}{2}\cdot|A_1C_1|\cdot|B_1D_1| = \frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot \text{tg}\alpha = \frac{a^2-b^2}{8}\cdot \text{tg}\alpha.$$

19. (P) W czworokącie wypukłym ABCD poprowadzono przekątną AC. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie. Uzasadnij, że w czworokąt ABCD można wpisać okrąg.

Teza: $|AB|+|CD|=|BC|+|AD|$.

D: Zauważmy, że *w czworokąt można wpisać okrąg wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe.*



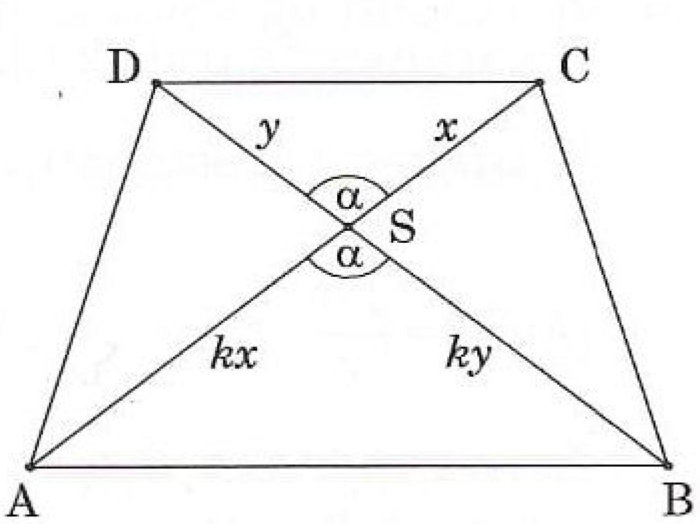
Sporządźmy rysunek i wprowadźmy oznaczenia. Korzystamy z własności okręgu wpisanego w trójkąt, z której wynika, że $|AA_1|=|AF|=|AD_1|=a_1$, $|A_1B| = |BB_1| = a_2$ oraz $|B_1C| = |CF| = |CC_1| = a_3$ i $|C_1D| = |DD_1| = a_4$.
$|AB|+|CD|=a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $|BC|+|AD|=a_2 + a_3 + a_1 + a_4$.

Sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe, zatem w czworokąt ten można wpisać okrąg.

20. (R) Pole trapezu ABCD jest równe S, a stosunek długości podstaw AB i CD wynosi k. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S i dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pole ΔASB jest równe $\frac{k^2S}{(k+1)^2}$.

Założenie: $\frac{|AB|}{|CD|} = k;\ k > 0$.

Teza: $P_{\Delta ABS} = \frac{k^2S}{(k+1)^2}$.



D: Na podstawie cechy *kkk* ΔASB jest podobny do ΔCSD w skali *k*, zatem $|SC| = x$, $|AS| = kx$, $|SD| = y$ i $|BS| = ky$.

$P_{\Delta CSD}=\frac{1}{2}\ x \cdot y \cdot \sin\alpha = P_1$;

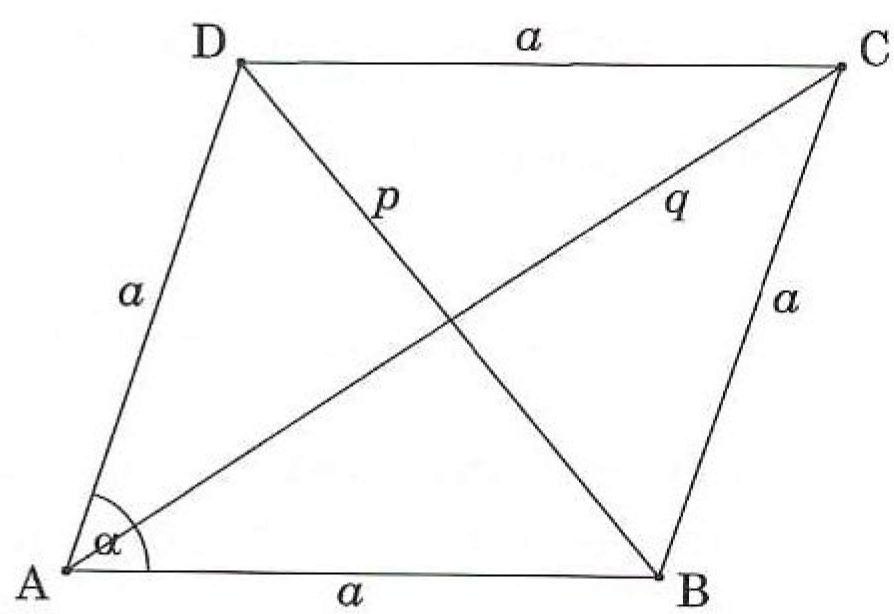
$P_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} k x \cdot ky \cdot \sin \propto = k^2 \cdot P_1;$
$P_{\Delta BSC} = \frac{1}{2} x \cdot ky \cdot \sin(180^{\circ} - \propto) = \frac{1}{2}\, k \cdot x \cdot y \cdot \sin \propto = k \cdot P_1;$
$P_{\Delta ASD} = \frac{1}{2} y \cdot kx \cdot \sin(180^{\circ} - \propto) = \frac{1}{2} k \cdot\ xky \cdot sin \propto = k \cdot P_1.$

Pole trapezu ABCD jest równe sumie pól trójkątów i z założenia równe jest S, zatem

$S = P_1 + 2k \cdot P_1 + k^2 \cdot P_1$
$S = (k+1)^2 \cdot P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{S}{(k+1)^2}.$
$P_{\Delta ABS} = \frac{k^2 S}{(k+1)^2}.$

21. (R) Wykaż, że jeśli p, q (przy czym $q > p > 0$) są długościami przekątnych rombu o kącie 30° to $\frac{p}{q} = 2 - \sqrt{3}$.

Założenie: p, q – długości przekątnych rombu, $q > p$,
$\propto = 30°$.
Teza: $\frac{p}{q} = 2 - \sqrt{3}$.



D: Niech $|AC| = q, |BD| = p,$
$|\sphericalangle BAD| = 30°,$
$|AB| = |BC| = a, |\sphericalangle ABC| = 150°.$

Korzystając z twierdzenia cosinusów w $\Delta\, DAB$:
$p^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 30°$, po przekształceniu otrzymujemy:

$p^2 = 2a^2 - \sqrt{3}a^2,\ p^2 = a^2(2 - \sqrt{3}).$

Z twierdzenia cosinusów w ΔABC: $q^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 150°$, zatem

$q^2 = 2a^2 + \sqrt{3}a^2,\ q^2 = a^2(2 + \sqrt{3}).$

Uwzględniając obie zależności, otrzymujemy:

$$\begin{cases} p^2 = a^2(2 - \sqrt{3}) \\ q^2 = a^2(2 + \sqrt{3}) \end{cases},$$

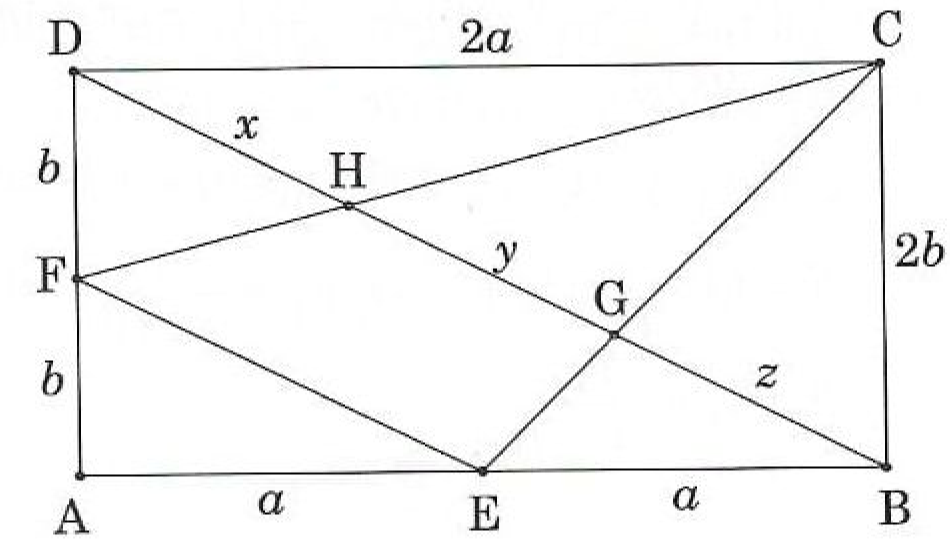
dzieląc stronami równania otrzymamy:

$\frac{p^2}{q^2} = \frac{a^2(2-\sqrt{3})}{a^2(2+\sqrt{3})}$, po przekształceniach $\frac{p^2}{q^2} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}$.

Obustronnie pierwiastkując, otrzymamy: $\frac{p}{q} = 2 - \sqrt{3}$.

22. (R) W prostokącie $ABCD$ wierzchołek C połączono odcinkami ze środkami E, F boków AB i AD, zaś punkty G, H to punkty przecięcia się tych odcinków z przekątną BD. Uzasadnij, że odcinki BG, GH i HD są równej długości.

Założenie: E,F – środki boków AB i AD.
Teza: |BG|=|GH|=|HD|.



D: Z założenia wynika, że $|AE| = |BE| = a, |CD| = 2a,$ $|AF| = |FD| = b, |BC| = 2b$ oraz $|DH| = x, |HG| = y, |GB| = z.$

W zadaniu należy wykazać, że długości boków są równe, zatem najprościej będzie skorzystać z podobieństwa trójkątów.

ΔFHD jest podobny do ΔBHC $(kkk) \Rightarrow \frac{x}{y+z} = \frac{b}{2b} \Rightarrow y + z = 2x$

oraz ΔEGB jest podobny do ΔCGD $(kkk) \Rightarrow \frac{z}{x+y} = \frac{a}{2a} \Rightarrow x + y = 2z.$

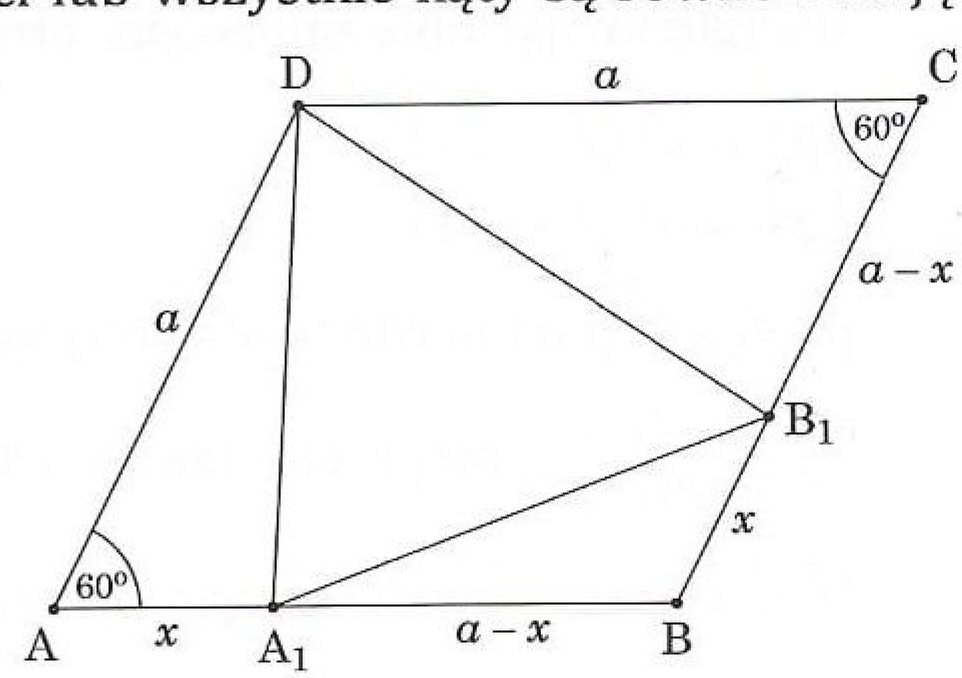
Otrzymujemy dwie zależności:

$$\begin{cases} y + z = 2x \\ x + y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ x + y = 2(2x - y) \end{cases} \Leftrightarrow 3x = 3y \Leftrightarrow x = y,$$

uwzględniamy powyższą równość: $x + y = 2z$, zatem $2x = 2z \Rightarrow x = z$, wobec tego $x = y = z$, a to oznacza, że $|DH| = |HG| = |GB|$.

23. (R) W rombie ABCD miara kąta |<BAD| jest równa $\frac{\pi}{3}$. Na bokach AB i BC wybrano punkty A_1 i B_1 w ten sposób, że $|AA_1|=|BB_1|$. Wykaż, że trójkąt A_1B_1D jest trójkątem równobocznym.

D: Aby wykazać, że ΔA_1B_1D jest równoboczny, należy pokazać, że wszystkie boki są tej samej długości lub wszystkie kąty są równe i mają miarę 60°.



Przyjmijmy, że $|AB| = a$ i oznaczmy $|AA_1| = |BB_1| = x$. Wtedy $|A_1B| = a - x$.

Korzystając z twierdzenia cosinusów w trójkącie AA_1D, A_1BB_1, B_1CD, otrzymujemy:

$|A_1D|^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos 60° \Rightarrow |A_1D|^2 = a^2 + x^2 - ax$

$|A_1B_1|^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x) \cdot \cos 120° \Rightarrow |A_1B_1|^2 =$
$= a^2 + x^2 - ax$

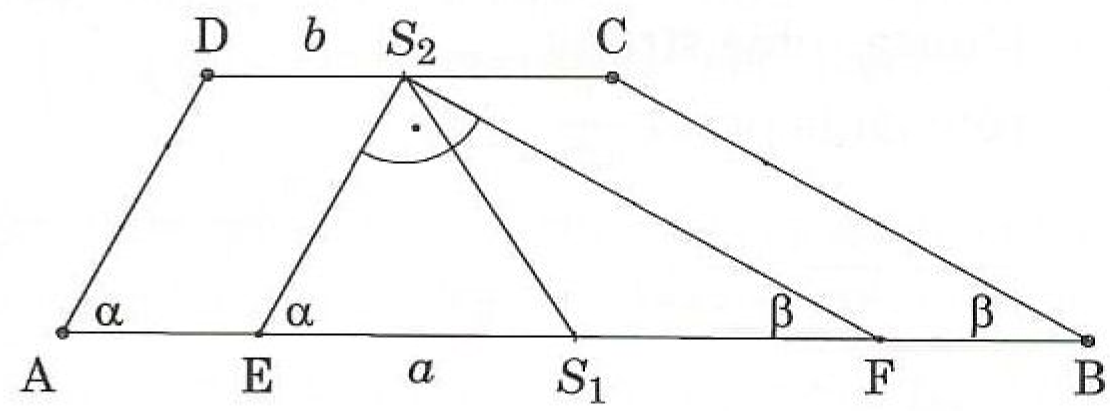
$|B_1D|^2 = a^2 + (a-x)^2 - 2a(a-x) \cdot \cos 60° \Rightarrow |B_1D|^2 = a^2 + x^2 - ax.$

Wszystkie boki mają taką samą długość, zatem trójkąt A_1B_1D jest trójkątem równobocznym.

24. (P) W trapezie, którego podstawy mają długości a i b, gdzie $a > b$, suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90°. Wykaż, że odcinek łączący środki podstaw tego trapezu ma długość $\frac{a-b}{2}$.

Założenie: $a > b$, $\alpha + \beta = 90°$,
S_1, S_2 – środki boków AB i CD

Teza: $|S_1S_2| = \frac{a-b}{2}$



D: Sporządźmy rysunek i wprowadźmy oznaczenia. Przesuńmy odcinek BC o wektor $\overrightarrow{CS_2}$ i odcinek AD o wektor $\overrightarrow{DS_2}$, wówczas $S_2F \| BC$, $S_2E \| AD$ i $|EF| = a - b$.

Z założenia $\alpha + \beta = 90°$, suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°, to

$|\sphericalangle ES_2F| = 180° - (\alpha + \beta)$
$|\sphericalangle ES_2F| = 90°$,

zatem ΔES_1F jest trójkątem prostokątnym, w którym S_1 jest środkiem przeciwprostokątnej. Z własności okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym wynika, że $|ES_1| = |S_1F| = |S_1S_2|$, zatem $|S_1S_2| = \frac{a-b}{2}$.

25. (P) W okręgu narysowano dwie średnice AB i CD. Udowodnij, że czworokąt ACBD jest prostokątem.

D: Z założenia AB i CD są średnicami okręgu, zatem ich długości są równe $2r$ i dzielą się na połowy. Odcinki AB i CD są przekątnymi tego czworokąta. Korzystamy z własności: *jeśli przekątne czworokąta są równej długości i dzielą się na połowy, to czworokąt jest prostokątem.*

Zadanie można rozwiązać także inną metodą.

Miara kąta wpisanego opartego na średnicy jest równa 90°.
$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle DAC| = 90°$.
Wynika z tego, że czworokąt $ACBD$ jest prostokątem.

26. (R) W wycinek koła o promieniu długości R wpisano okrąg o promieniu długości r. Cięciwa łącząca końce promieni wycinka koła ma długość $2a$. Wykaż, że $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

D: Zauważmy, że ΔSCO jest podobny do ΔADO na podstawie cechy *kkk*, zatem:

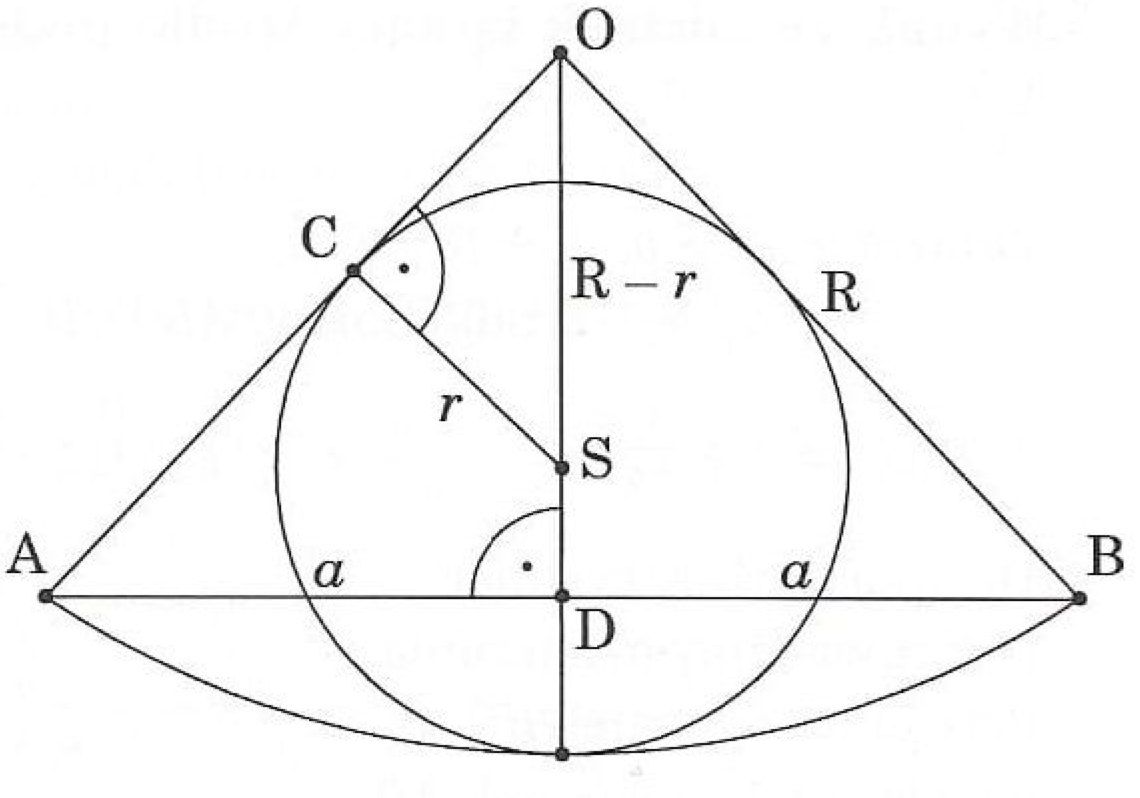
$\frac{r}{a} = \frac{R-r}{R}$

$Rr = aR - ar$
$Rr + ar = aR.$

Mnożąc obie strony równania przez $\frac{1}{aRr}$

$\frac{Rr}{aRr} + \frac{ar}{aRr} = \frac{aR}{aRr},$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r}.$



27. W trójkącie ABC, w którym $|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b, |\sphericalangle BAC| = 2\alpha$. Wykaż $\sin\alpha \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

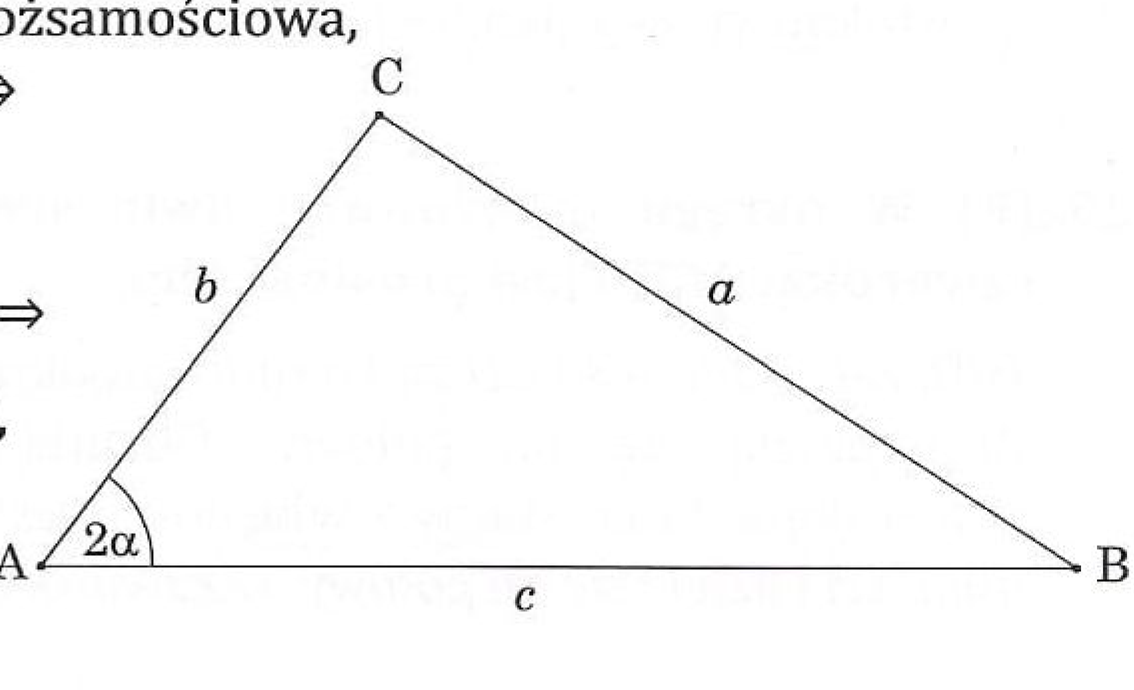
D: Z twierdzenia cosinusów $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos 2\alpha$. Z tożsamości: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ mamy:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,(1 - 2\sin^2\alpha) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\,\sin^2\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 = (b-c)^2 + 4bc\,\sin^2\alpha.$

$(b-c)^2 \geq 0$ – nierówność tożsamościowa,
wobec tego $a^2 \geq 4bc\,\sin^2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin^2\alpha \leq \frac{a^2}{4bc}$.

Z założenia $0° < 2\alpha < 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow 0° < \alpha < 90° \Rightarrow \sin\alpha > 0$,
zatem $\sin\alpha \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.



ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wykaż, że trapez nie będący równoległobokiem jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy ma równe przekątne.

2. W równobocznym trójkącie ABC wybrano na bokach BC, AC, AB odpowiednio punkty A_1, B_1, C_1 tak, że $BA_1 = CB_1 = AC_1$. Wykaż, że $\Delta A_1B_1C_1$ jest równoboczny.

3. Wykaż, że dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest także dwusieczną kąta między środkową i wysokością tego trójkąta poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego.

4. Wykaż, że suma długości środkowych trójkąta jest mniejsza od obwodu i większa od $\frac{3}{4}$ obwodu tego trójkąta.

5. Wykaż, że środki podstaw trapezu i punkt przecięcia się jego przekątnych są punktami współliniowymi.

6. Punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki. Wykaż, że $|\sphericalangle A_1BA_{16}| = 105°$, gdzie B jest punktem przecięcia się cięciw A_1A_{10} i A_5A_{16}.

7. Wykaż, że jeżeli każda z dwóch przekątnych czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach, to ten czworokąt jest równoległobokiem.

8. Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego, w którym przekątna o długości d tworzy z dłuższą podstawą kąt α, jest równe $P = \frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$.

9. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a, |BC| = b$. Wykaż, że odległości wierzchołków B i D od prostej AC są równe $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10. Wykaż, że środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.

11. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość c, zaś kąt wewnętrzny przy podstawie jest równy α. Uzasadnij, że długość środkowej BD tego trójkąta jest równa $x = \frac{c\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$.

12. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, a kąt α jest kątem wewnętrznym zawartym między bokami o długości b i c, to $\frac{a^2}{2bc} + \cos\alpha \geq 1$.