ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = (k^2 - 1)x^2 - 2kx + 4k + 5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i malejąca w przedziale $(1; \infty)$ dla $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1) + 2$. Wykaż, że istnieje taka wartość parametru m, dla którego dana funkcja przyjmowałaby wartości ujemne.
3. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 15$. Wykaż, że $W(2 - \sqrt{5})$ jest liczbą całkowitą.
4. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Wykres tej funkcji przesunięto o wektor $\vec{u} = [-5, 2]$, a następnie przekształcono przez powinowactwo prostokątne o osi OX i skali $k = -2$, tzn. wykres funkcji $y = h(x)$ otrzymano z wykresu $y = -2g(x)$. Udowodnij, że funkcja h określa się wzorem $h(x) = \frac{-4x-28}{x+5}$.
5. Uzasadnij, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = 5^{\log_5(-x^2+5x+6)}$ jest zbiór $(0; 12\frac{1}{4} >$.
6. Punkt $A = (-1, \frac{1}{3})$ należy do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Uzasadnij, że równanie $|f(x - 1) - 3| = m$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie dla $m \in (0; 2\frac{2}{3})$.
7. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x-1} - 2$. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $f(8 - x) \le f(2x)$ jest liczba 2.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wykaż, że $\sin 87° - \sin 59° - \sin 93° + \sin 61° = \sin 1°$.
2. Wykaż, że jeżeli $\sin x - \cos x = a$, to $\frac{\sin(10x) + \sin(4x) - \sin(6x)}{1 + \cos(2x) - 2\sin^2(4x)} = 2 - 2a^2$.
3. Wykaż, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos x \cdot |\sin x|}$ jest zbiór $\{-2, 2\}$.
4. Uzasadnij, że równanie $3\cos x + \cos(2x) = k$ ma rozwiązanie, gdy $k \in < -\frac{17}{8}; 4 >$.
5. Wiedząc, że $\operatorname{tg} x = 3$, uzasadnij, że $\frac{2\sin(2x) - 3\cos(2x)}{4\sin(2x) + 5\cos(2x)} = -\frac{9}{4}$.
6. Wiedząc, że $\frac{6\sin x + 5\cos x}{4\sin x + \cos x} = 2$, uzasadnij, że $\cos(2x) = -\frac{5}{13}$.
7. Uzasadnij, że równanie $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$ ma cztery rozwiązania w przedziale $< -3; 3 >$.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Uzasadnij, że suma wszystkich liczb naturalnych nieparzystych czterocyfrowych mniejszych od 5000 jest równa 6000000.
2. Udowodnij, że jeżeli drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią geometryczną wyrazu pierwszego i czwartego, to wyraz szósty jest średnią geometryczną wyrazu czwartego i dziewiątego.
3. Wykaż, że jeżeli ilorazem ciągu geometrycznego (a_n) jest $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to każdy wyraz ciągu oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego równy jest różnicy wyrazu następującego po nim i wyrazu go poprzedzającego.
4. Wykaż, że jeżeli S_n, S_{2n} i S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę n, $2n$ i $3n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), to $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.
5. Wykaż, że jeżeli ciąg $(ab,\ b^2,\ c^2)$ jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $(b, c, 2b - a)$ jest ciągiem geometrycznym.
6. Trzy różne liczby rzeczywiste różne od zera tworzą ciąg arytmetyczny, a kwadraty tych liczb zapisane w tym samym porządku tworzą ciąg geometryczny. Wykaż, ze iloraz q tego ciągu jest równy $q = (\sqrt{2} - 1)^2$ lub $q = (\sqrt{2} + 1)^2$.
7. Uzasadnij, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = a_{n+1} + a_n$ też jest ciągiem geometrycznym.
8. Uzasadnij, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+2} - \frac{3n^2+1}{n^2+4}\right) = -2$,
9. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x+3} + \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2} + \frac{(x+1)^3}{(x+3)^3} + \cdots$. Uzasadnij, że zbiór wartości tej funkcji $ZW = (-\frac{1}{2};\ \infty)$.
10. Suma trzech pierwszych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 21, zaś suma trzech następnych wyrazów jest równa $\frac{21}{64}$. Uzasadnij, że suma wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $21\frac{1}{3}$.
11. Uzasadnij, że istnieje jedna liczba naturalna spełniająca równanie $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \cdots = 1$.