Odpowiedzi

Trygonometria

Praca klasowa nr 1, grupa A

1.	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji $f(x) = 2\sin^2 x - 2\sin x + 3$: $ZW_f = \left\langle 2\frac{1}{2}, 7 \right\rangle$	3 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie podwójnej nierówności $2\frac{1}{2} \leq \lvert k-2 \rvert + 6 \leq 7 \Leftrightarrow k \in \left\langle -11, -6\frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle 10\frac{1}{2}, 15 \right\rangle$	3 pkt	
2.	Rozpatrywanie lewej strony jako szeregu geometrycznego zbieżnego, wyznaczenie ilorazu ciągu geometrycznego $q = \cos^2 x$, rozwiązanie nierówności $\lvert q \rvert < 1 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - \{k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{C}$, zapisanie sumy w postaci $\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	3 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności $\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} \geq 1$ i $x \in \boldsymbol{R} - \{k\pi\} \Leftrightarrow$ $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi \right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$, $k \in \boldsymbol{C}$	3 pkt	
3.	Zapisanie wzoru funkcji w postaci $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \\ -\cos 2x & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right) \end{cases}$, $k \in \boldsymbol{C}$	2 pkt	6 pkt
	Naszkicowanie wykresu funkcji	3 pkt	
	Określenie ilości miejsc zerowych w zadanym przedziale (12 miejsc zerowych)	1 pkt	
4.	Wyznaczenie dziedziny równania $D_r = \boldsymbol{R} - \{k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{C}$	1 pkt	6 pkt
	Doprowadzenie równania do postaci $(\sin x - 1)(\sin x - \cos x) = 0$	2 pkt	
	Rozwiązanie równania $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$	1 pkt	
	Rozwiązanie równania $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$; podanie odpowiedzi	2 pkt	
5.	Wyznaczenie dziedziny $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \beta \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ przez rozwiązanie warunku $\cos(\alpha+\beta) \neq -\cos(\alpha-\beta) \wedge \cos\alpha \neq 0$	3 pkt	6 pkt
	Wykazanie, że równość jest tożsamością	3 pkt	

Praca klasowa nr 1, grupa B

1.	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji $f(x) = 3\cos^2 x - \cos x + 2$: $ZWf = \left\langle 1\frac{2}{3}, 7 \right\rangle$	3 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie podwójnej nierówności $1\frac{2}{3} \le \lvert k+1 \rvert - 7 \le 7 \Leftrightarrow k \in \left\langle -15, -9\frac{2}{3} \right\rangle \cup \left\langle 7\frac{2}{3}, 13 \right\rangle$	3 pkt	
2.	Rozpatrywanie lewej strony jako szeregu geometrycznego zbieżnego, wyznaczenie ilorazu ciągu geometrycznego $q = \sin^2 x$, rozwiązanie nierówności $\lvert q \rvert < 1 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, zapisanie sumy w postaci $\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	3 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności $\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \ge 3$ i $x \in \boldsymbol{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \Leftrightarrow$ $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\rangle$, $k \in \boldsymbol{C}$	3 pkt	
3.	Zapisanie wzoru funkcji w postaci $f(x) = \begin{cases} -\cos 2x & \text{dla } x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle \\ -1 & \text{dla } x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$	2 pkt	6 pkt
	Narysowanie wykresu funkcji	3 pkt	
	Określenie ilości miejsc zerowych w zadanym przedziale (11 miejsc zerowych)	1 pkt	
4.	Wyznaczenie dziedziny równania $D_r = \boldsymbol{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{C}$	1 pkt	6 pkt
	Doprowadzenie równania do postaci $(\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$	2 pkt	
	Rozwiązanie równania $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$	1 pkt	
	Rozwiązanie równania $\sin x = -\cos x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$; podanie odpowiedzi	2 pkt	
5.	Wyznaczenie dziedziny $\alpha \ne k\pi \wedge \beta \ne k\pi$, poprzez rozwiązanie warunku $\cos(\alpha + \beta) \ne \cos(\alpha - \beta) \wedge \sin \alpha \ne 0$	3 pkt	6 pkt
	Wykazanie, że równość jest tożsamością	3 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa A

1.	Zauważenie, że jeśli $x \in (0, \frac{\pi}{6})$, to $\sin x \in (0, \frac{1}{2})$, i zapisanie warunku $0 < \frac{k^2+2k+1}{k^2+1} < \frac{1}{2}$	2 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności $0 < \frac{k^2+2k+1}{k^2+1} \Leftrightarrow k \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$	1 pkt	
	Rozwiązanie nierówności $\frac{k^2+2k+1}{k^2+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $k \in (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$	2 pkt	
	Wyznaczenie wspólnego rozwiązania $k \in (-2-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, -2+\sqrt{3})$	1 pkt	
2.	a) $D_f = \boldsymbol{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, $k \in \boldsymbol{C}$; zapisanie funkcji w postaci $f(x) = \frac{2}{\sin 2x}$ i wyznaczenie zbioru wartości funkcji $ZW_f = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$	3 pkt	6 pkt
	b) zapisanie równania w postaci $\lvert\sin 2x\rvert > \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $x \in D_f$ i wyznaczenie rozwiązania $x \in \left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)$ i $k \in \boldsymbol{C}$	3 pkt	
3.	Zastosowanie wzoru na sumę sinusów i zapisanie równania w postaci $2\sin 2x\cos x - \cos 2x = 1$	1 pkt	6 pkt
	Zastosowanie wzorów na sinus i cosinus podwojonego argumentu oraz doprowadzenie do równania postaci $4\sin x\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 1$	1 pkt	
	Doprowadzenie do równania tylko z jedną funkcją trygonometryczną i zapisanie go w postaci iloczynowej: $(2\sin x - 1)(1 - \sin^2 x) = 0$	1 pkt	
	Wyznaczenie rozwiązań równań $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, $\sin x = \frac{1}{2}$ oraz zapisanie odpowiedzi $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$, $k \in \mathbf{C}$	3 pkt	
4.	Sprawdzenie, że dziedziny obu funkcji są równe $D_f = D_g = \boldsymbol{R} - \{-\frac{\pi}{4} + k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{C}$	2 pkt	6 pkt
	Przekształcenie wzoru funkcji	4 pkt	

	$\text{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$ (3 pkt) i stwierdzenie, że funkcje nie są równe (1 pkt)		
5.	a) Wypisanie przekształceń i narysowanie wykresu	3 pkt	6 pkt
	b) obliczenie $f(\frac{13}{12}\pi) = -\frac{\sqrt{3}+2}{2}$	3 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa B

1.	Zauważenie, że jeśli $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, to $\cos x \in (0, \frac{1}{2})$, i zapisanie warunku $0 < \frac{k^2-2k+1}{k^2+1} < \frac{1}{2}$	2 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności $0 < \frac{k^2-2k+1}{k^2+1} \Leftrightarrow k \in \boldsymbol{R} - \{1\}$	1 pkt	
	Rozwiązanie nierówności $\frac{k^2-2k+1}{k^2+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	2 pkt	
	Wyznaczenie wspólnego rozwiązania $k \in (2-\sqrt{3}, 1) \cup (1, 2+\sqrt{3})$	1 pkt	
2.	a) $D_f = \boldsymbol{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, $k \in \boldsymbol{C}$; zapisanie funkcji w postaci $f(x) = \frac{2}{\sin 2x}$ i wyznaczenie zbioru wartości funkcji $ZW_f = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$	3 pkt	6 pkt
	b) zapisanie równania w postaci $\lvert \sin 2x \rvert > \frac{1}{2}$ i $x \in D_f$ i wyznaczenie rozwiązania $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)$ i $k \in \boldsymbol{C}$	3 pkt	
3.	Zastosowanie wzoru na sumę sinusów i zapisanie równania w postaci $2\sin x\cos 2x + \cos 2x = 1$	1 pkt	6 pkt
	Zastosowanie wzorów na cosinus podwojonego argumentu oraz doprowadzenie do równania postaci iloczynowej $-2\sin x(2\sin^2 x + \sin x - 1) = 0$	2 pkt	
	Wyznaczenie rozwiązania równania $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$	1 pkt	
	Wyznaczenie rozwiązań równania $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{C}$ i zapisanie odpowiedzi do zadania.	2 pkt	
4.	Sprawdzenie, że dziedziny obu funkcji są równe $D_f = D_g = \boldsymbol{R} - \{\frac{\pi}{4} + k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{C}$	2 pkt	6 pkt
	Przekształcenie wzoru funkcji	4 pkt	

	$\text{ctg}(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = -\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$ (3 pkt) i stwierdzenie, że funkcje nie są równe (1 pkt)		
5.	a) Wypisanie przekształceń i narysowanie wykresu	3 pkt	6 pkt
	b) obliczenie $f(\frac{5}{3}\pi) = \frac{\sqrt{3}+6}{2}$	3 pkt	