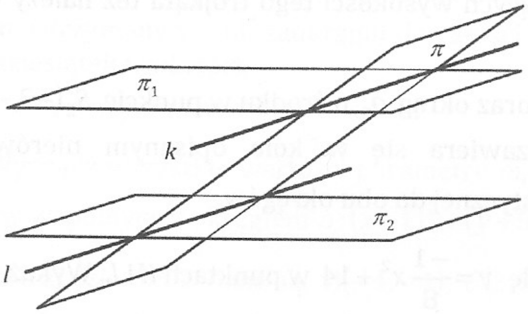
9. Geometria przestrzenna

Podstawowe informacje

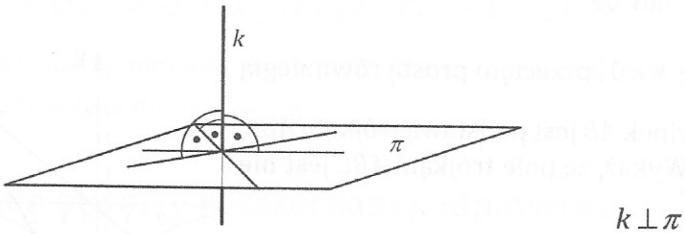
Proste i płaszczyzny w przestrzeni

9.1. Jeśli dwie równoległe płaszczyzny są przecięte trzecią płaszczyzną, to otrzymane krawędzie przecięcia są równoległe.



$\pi_1 \,||\, \pi_2$, to $k \,||\, l$

9.2. a) **Prosta i płaszczyzna są prostopadłe** wtedy, gdy prosta jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie i przecinającej daną prostą.



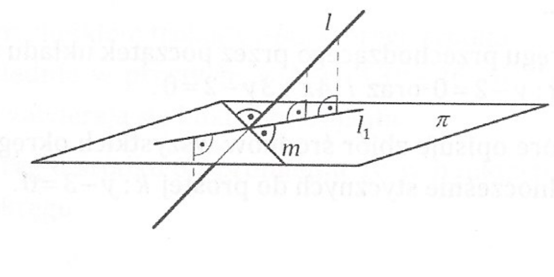
$k \perp \pi$

b) Jeśli prosta jest prostopadła do dwóch prostych leżących na płaszczyźnie i przebija płaszczyznę w punkcie ich przecięcia, to jest prostopadła do tej płaszczyzny.

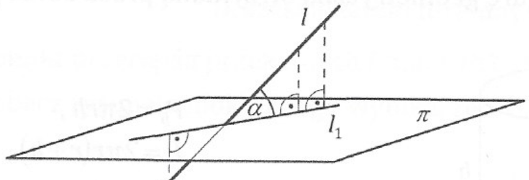
9.3. Płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2 wtedy, gdy w płaszczyźnie π_1 jest zawarta prosta prostopadła do płaszczyzny π_2.

9.4. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Jeśli prosta l przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła, prosta l_1 jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π, prosta m leży na płaszczyźnie π i przecina prostą l, to prosta m jest prostopadła do prostej l wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l_1.



9.5. Kątem między prostą l (przebijającą płaszczyznę π i nieprostopadłą do niej) a płaszczyzną π nazywamy kąt ostry α między prostą l a jej rzutem prostokątnym l_1 na płaszczyznę π.

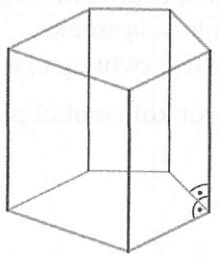


Oznaczmy:

P_b – pole powierzchni bocznej, P_p – pole podstawy, P – pole powierzchni (całkowitej), V – objętość

Wielościany

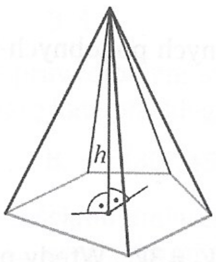
9.6. Graniastosłupem nazywamy wielościan, który ma dwie przystające ściany położone w płaszczyznach równoległych (podstawy graniastosłupa), a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami. Graniastosłup, w którym ściany boczne są prostokątami, nazywamy **graniastosłupem prostym**, a jeżeli nie są prostokątami to – **graniastosłupem pochyłym.**



$P_b = 2p \cdot h$,
$V = P_p \cdot h$,
gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa,
h – wysokością graniastosłupa

9.7. Graniastosłup prawidłowy jest to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

9.8. Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ze ścian, zwana podstawą, jest wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku (nieleżącym w płaszczyźnie podstawy), zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.



$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$,
gdzie h jest wysokością ostrosłupa

9.9. a) **Ostrosłupem prostym** nazywamy ostrosłup spełniający dwa warunki:
1) na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg
2) spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie

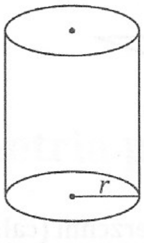
b) Następujące warunki są równoważne:
1) ostrosłup jest ostrosłupem prostym
2) wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość
3) wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą jednakowe kąty z płaszczyzną podstawy.

9.10. Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

9.11. W podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.

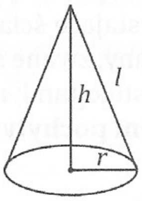
Bryły obrotowe

9.12. Walcem nazywamy figurę geometryczną otrzymaną przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.



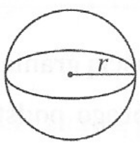
$P_b = 2\pi rh$,
$P = 2\pi r(r+h)$,
$V = \pi r^2 h$,
gdzie r jest promieniem podstawy,
h – wysokością walca

9.13. Stożkiem nazywamy figurę geometryczną otrzymaną przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta.



$P_b = \pi rl$;
$P = \pi r(r+l)$;
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$,
gdzie r jest promieniem podstawy,
h – wysokością stożka,
l – długością tworzącej stożka

9.14. Kulą nazywamy figurę geometryczną otrzymaną przez obrót koła wokół prostej zawierającej średnicę tego koła.



$P = 4\pi r^2$;
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$,
gdzie r jest promieniem kuli

9.15. Przekrojem osiowym nazywamy taki przekrój płaszczyzną bryły obrotowej, który zawiera oś obrotu tej bryły.

9.16. Jeśli figura przestrzenna F_1 (o objętości V_{F_1}) jest podobna do figury przestrzennej F (o objętości V_F) w skali k, to $\frac{V_{F_1}}{V_F} = k^3$ (stosunek objętości figur przestrzennych podobnych jest równy sześcianowi skali podobieństwa).

Zadania zamknięte

9.1. Dane są dwa sześciany o objętościach V_1 i V_2, przy czym $V_2 = 3V_1$. Wtedy pola powierzchni P_1 i P_2 tych sześcianów spełniają równość:

A. $P_2 = 3P_1$ B. $P_2 = 9P_1$ C. $P_2 = 27P_1$ D. $P_2 = \sqrt[3]{9}P_1$

9.2. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma taką samą długość jak krawędź sześcianu, a krawędź boczna graniastosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Stosunek długości przekątnej sześcianu do przekątnej graniastosłupa jest równy:

A. $1:\sqrt{2}$ B. $1:2$ C. $1:\sqrt{3}$ D. $1:3$

9.3. Niech x oznacza odległość wierzchołka sześcianu od przekątnej, do której ten wierzchołek nie należy. Jeżeli krawędź sześcianu ma długość a, to:

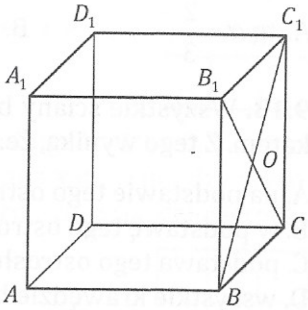
A. $2x = a\sqrt{3}$ B. $3x = a\sqrt{6}$ C. $2x = a\sqrt{2}$ D. $a = \sqrt{6}x$

9.4. Przekrój sześcianu płaszczyzną **nie może** być:

A. trójkątem równobocznym B. kwadratem

C. pięciokątem foremnym D. sześciokątem foremnym

9.5. Niech punkt O oznacza punkt przecięcia przekątnych ściany BCC_1B_1 sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (zobacz rysunek obok). Z tego wynika, że:



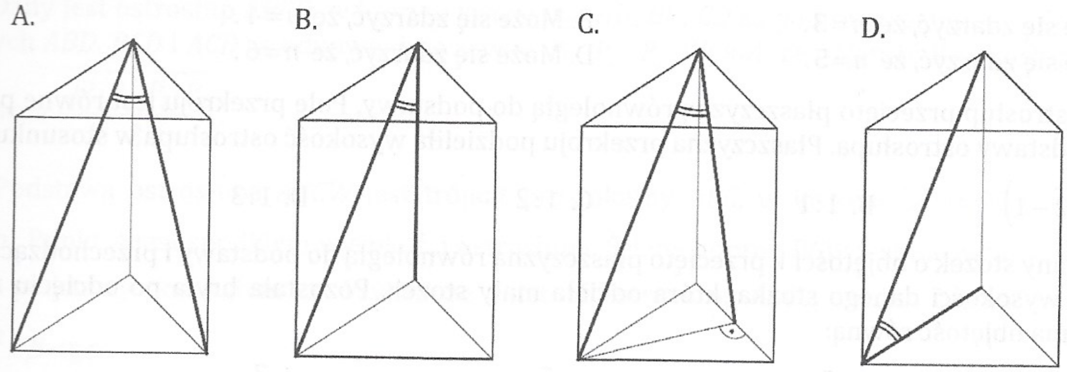
A. $AO \perp BC_1$

B. $AO \perp CB_1$

C. Odległość punktu A od ściany BCC_1B_1 jest równa $|AO|$.

D. $|AO| \neq |D_1O|$

9.6. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną jest zaznaczony na rysunku:



9.7. Podstawią graniastosłupa jest n-kąt $(n \in N, n > 2)$. Suma miar kątów podstaw i wszystkich ścian bocznych tego graniastosłupa jest równa:

A. $180°(n-2)$ B. $180°(n-1)$ C. $720°(n-2)$ D. $720°(n-1)$

9.8. Liczba krawędzi sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ skośnych do przekątnej AC_1 sześcianu jest równa:

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

9.9. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym przeciwległe krawędzie boczne tworzą kąt $60°$. Niech α oznacza miarę kąta płaskiego ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa. Tak więc:

A. $\alpha \in (0°, 30°)$ B. $\alpha \in (30°, 45°)$ C. $\alpha \in (45°, 60°)$ D. $\alpha \in (60°, 90°)$

9.10. We wnętrzu sześcianu umieszczono czworościan foremny w ten sposób, że wszystkie krawędzie czworościanu są przekątnymi ścian sześcianu. Stosunek objętości czworościanu do objętości sześcianu jest równy:

A. 1:3 B. 2:3 C. 1:4 D. 2:5

9.11. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają taką samą długość. Z tego wynika, że:

A. na podstawie danego ostrosłupa można opisać okrąg

B. w podstawę tego ostrosłupa można wpisać okrąg

C. podstawa jego ostrosłupa jest wielokątem foremnym

D. wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.

9.12. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt o najdłuższym boku 6 i największym kącie 150°. Jeśli wysokość ostrosłupa jest równa 9, to krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod takim kątem α, że:

A. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ B. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{\sqrt{3}}$ D. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$

9.13. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Z tego wynika, że:

A. na podstawie tego ostrosłupa można opisać okrąg
B. w podstawę tego ostrosłupa można wpisać okrąg
C. podstawa tego ostrosłupa jest wielokątem foremnym
D. wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają taką samą długość.

9.14. Podstawą ostrosłupa jest n-kąt foremny $(n\in N, n>2)$. Wszystkie krawędzie ostrosłupa mają taką samą długość. Wśród poniższych zdań, wskaż zdanie **fałszywe**:

A. Może się zdarzyć, że $n=3$. B. Może się zdarzyć, że $n=4$.
C. Może się zdarzyć, że $n=5$. D. Może się zdarzyć, że $n=6$.

9.15. Ostrosłup przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Pole przekroju jest równe połowie pola podstawy ostrosłupa. Płaszczyzna przekroju podzieliła wysokość ostrosłupa w stosunku:

A. $1:(\sqrt{2}-1)$ B. $1:1$ C. $1:2$ D. $1:3$

9.16. Dany stożek o objętości V przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i przechodzącą przez środek wysokości danego stożka, która odcięła mały stożek. Pozostała bryła po odcięciu małego stożka ma objętość równą:

A. $\frac{1}{2}V$ B. $\frac{3}{4}V$ C. $\frac{5}{6}V$ D. $\frac{7}{8}V$

9.17. W kulę wpisano stożek w ten sposób, że koło wielkie kuli jest jednocześnie podstawą stożka. Jaką część objętości kuli stanowi objętość tego stożka?

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{8}$

9.18. Między polem powierzchni P sfery opisanej na sześcianie, a polem powierzchni p sfery wpisanej w ten sześcian zachodzi zależność:

A. $P=1{,}5p$ B. $P=2p$ C. $P=2{,}5p$ D. $P=3p$

9.19. W naczyniu w kształcie walca, wypełnione częściowo wodą, wrzucono kulę, która zanurzyła się w wodzie całkowicie, podnosząc poziom wody w naczyniu o 1 cm. Jeśli podstawa walca ma promień 6 cm, to promień zanurzonej kuli jest równy:

A. 1 cm B. 2 cm C. 3 cm D. 4 cm

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

9.20. Wszystkie wysokości ścian bocznych ostrosłupa trójkątnego są równe 10 cm i tworzą z płaszczyzną podstawy kąt 75°. Oblicz promień okręgu wpisanego w podstawę. Zakoduj cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku zaokrąglenia do 0,01 rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

9.21. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o bokach długości 10, 10, 12. Wiedząc, że wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 15, oblicz sinus kąta α między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną. Zakoduj trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

■ **9.22.** Wykaż, że jeśli w prawidłowym ostrosłupie czworokątnym każdy kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę $60°$, to przeciwległe krawędzie boczne są do siebie prostopadłe.

■ **9.23.** Dany jest ostrosłup *ABCD*, w którym krawędzie *AD*, *BD*, *CD* są parami prostopadłe. Pola ścian bocznych *ABD*, *BCD* i *ACD* są odpowiednio równe P_1, P_2, P_3. Wykaż, że objętość *V* ostrosłupa *ABCD* jest równa $\frac{\sqrt{2\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3}}{3}$.

■ **9.24.** Podstawą ostrosłupa *ABCW* jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym $|\angle A|=90°$, $|\angle B|=\beta$, $|BC|=a$. Punkt *A* jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Ściana boczna *BCW* jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wykaż, że objętość ostrosłupa *ABCW* można zapisać w postaci $\frac{a^3}{24}\sin^2 2\beta\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

■ **9.25.** Wykaż, że jeśli w prawidłowym ostrosłupie *n*-kątnym wysokość jest dwa razy krótsza od boku podstawy, to kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę $\frac{180°}{n}$.

9.26. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 6 i 8. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 13 cm. Oblicz:
a) sinus kąta α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy;
b) tangens kąta β nachylenia ściany bocznej o najmniejszym polu do płaszczyzny podstawy.

9.27. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego przekątne mają długość 7,5 cm i 10 cm. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem β. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 75 cm^2, wyznacz β.

9.28. Podstawą ostrosłupa *ABCDW* jest prostokąt *ABCD*, w którym $|AB|=a$, $|BC|=b$. Ściany boczne *WAB* i *WDC* nachylone są do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz tangens β, gdzie β oznacza kąt, pod jakim są nachylone do płaszczyzny podstawy pozostałe dwie ściany boczne.

■ **9.29.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 2α. Przez krawędź podstawy poprowadzono płaszczyznę prostopadłą do przeciwległej krawędzi bocznej ostrosłupa. Wykaż, że tworzy ona z płaszczyzną podstawy taki kąt β, że $\sqrt{3}\cdot \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos\beta=1$.

9.30. W ostrosłupie prawidłowym *ABCDE* podstawą jest kwadrat *ABCD* o boku długości *a*. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa *H*, oblicz odległość *d* wierzchołka *A* od krawędzi bocznej *EC*.

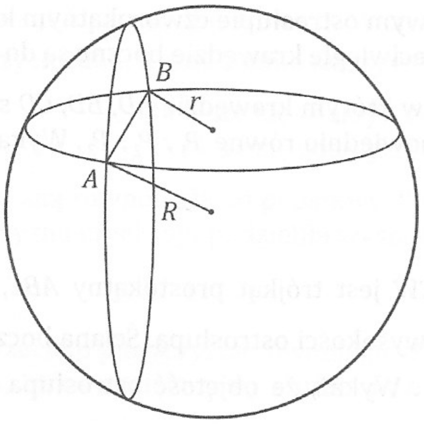
■ **9.31.** W walcu i stożku są równe: promienie podstaw, wysokości i pola powierzchni bocznych. Wykaż, że kąt rozwarcia stożka ma miarę 120°.

9.32. Wycinek koła, którego kąt środkowy jest równy $240°$, zwinięto, tworząc powierzchnię boczną stożka. Oblicz cosinus kąta rozwarcia tego stożka.

■ **9.33.** Równoległobok ma boki długości a i b. W wyniku obrotu tego równoległoboku wokół boku a powstaje bryła o objętości V_1, wokół zaś boku b – bryła o objętości V_2. Wykaż, że $V_1 : V_2 = b : a$.

9.34. Na płaszczyźnie leżą cztery identyczne kule, z których każda jest styczna do dwóch sąsiednich. Środki tych kul są wierzchołkami kwadratu, w którym przekątna jest o 4 cm dłuższa od boku. Środek symetrii kwadratu jest środkiem piątej kuli umieszczonej pomiędzy czterema wyżej wymienionymi kulami i stycznej do każdej z nich. Wyznacz promień piątej kuli.

9.35. Na powierzchni kuli o promieniu $R=\sqrt{1201}$ znajdują się dwa jednakowe okręgi zawarte w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych. Wspólna cięciwa AB tych okręgów ma długość 14. Oblicz promień r tych okręgów.



Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

9.36. Podstawą sześcianu jest kwadrat $ABCD$. Na dwóch ścianach bocznych tego sześcianu poprowadzono odcinki AM i AN (punkty M, N, leżą na krawędziach bocznych), które tworzą odpowiednio z krawędziami AB i AD kąty równe $30°$. Wyznacz:
a) cosinus kąta MAN,
b) cosinus kąta nachylenia płaszczyzny (MAN) do płaszczyzny $(ABCD)$.

9.37. Stosunek wysokości graniastosłupa prawidłowego trójkątnego do krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{2}:1$. Oblicz miarę kąta między przekątną ściany bocznej tego graniastosłupa a sąsiednią ścianą boczną.

■ **9.38.** Prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przecięto płaszczyzną nierównoległą do podstawy $ABCD$. Ta płaszczyzna przecięła krawędzie boczne AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 odpowiednio w punktach A_2, B_2, C_2, D_2. Wykaż, że:
a) czworokąt $A_2B_2C_2D_2$ jest równoległobokiem
b) $|AA_2|+|CC_2|=|BB_2|+|DD_2|$.

9.39. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o bokach długości a, a, b. Ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$. Oblicz objętość ostrosłupa.

9.40. Podstawą ostrosłupa $ABCW$ jest trójkąt ABC, którego boki mają długość: $|AB|=8$, $|BC|=3$, $|AC|=7$. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

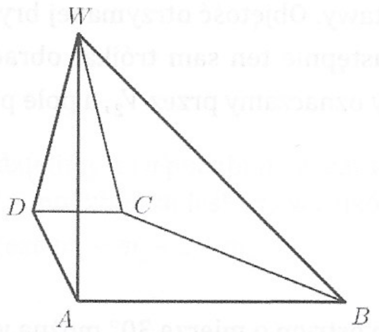
9.41. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt przy podstawie ściany bocznej jest równy α.
a) Oblicz $\cos\beta_1$ i $\cos\beta_2$, gdzie β_1 jest kątem nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, a β_2 jest kątem między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa.

b) Podaj, w jakim zakresie mogą zmieniać się kąty α, β_1, β_2.

9.42. W czworościanie trzy krawędzie wychodzące z tego samego wierzchołka są parami prostopadłe i mają jednakową długość, równą $\sqrt{2}$. Oblicz odległość tego wierzchołka od przeciwległej ściany czworościanu.

9.43. Dany jest nieskończony ciąg czworościanów foremnych. Każdy z czworościanów (oprócz pierwszego) ma wierzchołki w punktach będących środkami ciężkości ścian poprzedniego czworościanu. Oblicz stosunek sumy objętości wszystkich tych czworościanów do objętości największego z nich.

■ **9.44.** Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest trapez prostokątny $ABCD$, w którym $AB \| CD$, $AD \perp AB$, $|AB| = 25$, $|AD| = 12$, $|CD| = 9$. Wysokość ostrosłupa jest krawędzią AW. Wykaż, że ściana boczna WBC jest trójkątem prostokątnym.



■ **9.45.** Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Wspólna krawędź dwóch ścian bocznych jest wysokością tego ostrosłupa. Dwie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wykaż, że kąt między dwiema ścianami bocznymi, które nie są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, jest równy 120°.

■ **9.46.** W ostrosłupie $ABCD$ krawędź AD jest wysokością, $|AD| = |AB| = |AC|$ oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Niech punkt P oznacza środek krawędzi BD, a punkt Q – środek krawędzi DC oraz $|\angle PAQ| = \beta$. Wykaż, że $2\cos\beta = \cos\alpha + 1$.

■ **9.47.** Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt prostokątny ABC, $|\angle C| = 90°$. Ściana boczna ABD jest przystająca do trójkąta ABC, $|BC| = |BD|$, $|AC| = |AD|$ i prostopadła do płaszczyzny podstawy. Oznaczamy $|\angle CAD| = \alpha$ i $|\angle CBD| = \beta$. Wykaż, że $\cos\alpha + \cos\beta = 1$.

■ **9.48.** Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o krawędzi długości a. Przez punkty B, A_1, D prowadzimy płaszczyznę.
a) Oblicz pole otrzymanego przekroju.
b) Wykaż, że przekątna sześcianu poprowadzona z wierzchołka A jest prostopadła do płaszczyzny przekroju oraz punkt wspólny tej przekątnej i płaszczyzny przekroju dzieli przekątną w stosunku $1:2$.

■ **9.49.** Dany jest sześcian o krawędzi długości a. Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i odcinek łączący środki dwóch sąsiednich krawędzi przeciwległej podstawy jest trapezem równoramiennym. Wykaż, że pole tego trapezu jest równe $\frac{9}{8}a^2$.

9.50. Prostopadłościan, którego podstawą jest kwadrat o boku 6 cm, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy. Płaszczyzna ta przecina prostą, łączącą środki symetrii podstaw w punkcie, którego odległość od podstawy dolnej jest równa 4 cm. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

9.51. Podstawą ostrosłupa prostego $ABCD$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym mamy dane: $|\angle C| = 90°$, $|AC| = |BC|$, $|AB| = c$. Przez przeciwprostokątną AB i środek M przeciwległej krawędzi bocznej poprowadzono płaszczyznę i otrzymano przekrój ostrosłupa, którego pole jest równe P. Oblicz pole ściany bocznej ABD tego ostrosłupa.

■ **9.52.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym poprowadzono przekrój płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej tego ostrosłupa. Wykaż, że płaszczyzna przekroju podzieliła wysokość ostrosłupa na odcinki, których długości pozostają w stosunku 3 : 1, licząc od wierzchołka ostrosłupa.

9.53. Na płaszczyźnie leżą cztery identyczne kule o promieniu R, z których każda jest styczna do dwóch sąsiednich kul. Na tej płaszczyźnie leży też piąta kula, która jest styczna do czterech kul o promieniu R. Wyznacz promień piątej kuli.

■ **9.54.** Trójkąt ostrokątny równoramienny obracamy dookoła prostej przechodzącej przez wierzchołek trójkąta i równoległej do podstawy. Objętość otrzymanej bryły oznaczamy przez V_1, a pole powierzchni całkowitej przez P_1. Następnie ten sam trójkąt obracamy dookoła podstawy. Objętość otrzymanej w tym przypadku bryły oznaczamy przez V_2, a pole powierzchni całkowitej przez P_2.

a) Oblicz $\frac{V_2}{V_1}$.

b) Wykaż, że $\sqrt{2} - 1 < \frac{P_2}{P_1} < 1$.

9.55. W trapez prostokątny o kącie ostrym o mierze 30° można wpisać okrąg o promieniu r. Trapez ten obraca się wokół prostej zawierającej jego krótsze ramię. Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.

9.56. Stożek i walec mają podstawy o takim samym promieniu oraz mają takie same wysokości. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe polu powierzchni bocznej walca. Oblicz cosinus kąta rozwarcia stożka.

9.57. W stożek o wysokości 8 wpisano kulę o promieniu 3. Oblicz odległość punktów styczności kuli z powierzchnią boczną stożka od płaszczyzny podstawy tego stożka.

9.58. Rozpatrujemy stożki o tworzącej l. Wyznacz sinus kąta rozwarcia stożka o największej objętości.

■ **9.59.** W stożek wpisano walec o największej możliwej objętości. Wykaż, że stosunek objętości tego walca do objętości stożka jest równy $4:9$.

9.60. Na kuli o promieniu R opisujemy stożki. Wyznacz wysokość stożka o najmniejszej objętości.

9.61. W kulę o promieniu R wpisujemy walce (tzn. okręgi w podstawach każdego walca należą do sfery wyznaczającej kulę). Wyznacz promień podstawy r i wysokość h walca o największej powierzchni bocznej.

9.62. Prostopadłościan, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 10 i którego wysokość jest równa 4, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy. Płaszczyzna przekroju przechodzi też przez górną podstawę prostopadłościanu. Przy jakim położeniu płaszczyzny pole przekroju jest największe? Podaj, w jakim stosunku płaszczyzna przekroju dzieli przekątną górnej podstawy.

$3+|y-3|=\sqrt{x^2+y^2}$, gdzie $y\neq 3$. Obie strony równania są dodatnie, więc równanie możemy podnieść stronami do kwadratu. Obliczamy: $9+6|y-3|+(y-3)^2=x^2+y^2$, czyli $6|y-3|-6y+18=x^2$. Jeśli $y<3$, to otrzymujemy równanie paraboli $y=\frac{-1}{12}x^2+3$; jeśli $y>3$, to otrzymujemy równanie $x=0$, które dla $y>3$ opisuje półprostą (otwartą), zawartą w osi OY.

9. Geometria przestrzenna

Zadania zamknięte

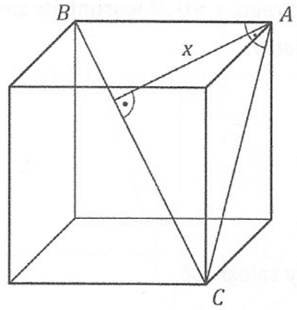
9.1. D (11.2G)

Oznaczamy: a_1 – długość krawędzi sześcianu o objętości V_1 , a_2 – długość krawędzi sześcianu o objętości V_2 . Mamy więc $a_2^3=3a_1^3$ skąd $a_2=\sqrt[3]{3}a_1$. Zatem $P_2=6a_2^2=6\cdot\sqrt[3]{9}a_1^2=\sqrt[3]{9}P_1$.

9.2. A (11.1G, 10.7G)

Ze wzoru (**7.8**) mamy: $d_s=a\sqrt{3}$, $d_g=\sqrt{a^2+a^2+(2a)^2}=\sqrt{6}a$. Wobec tego $d_s:d_g=\sqrt{3}:\sqrt{6}$, czyli $d_s:d_g=1:\sqrt{2}$.

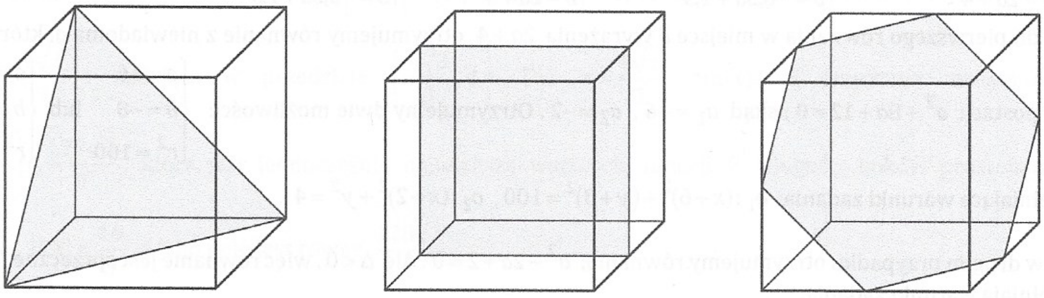
9.3. B (11.1G, 10.7G)



Na rysunku obok trójkąt ABC jest prostokątny; $|AB|=a$, $|AC|=a\sqrt{2}$, $|BC|=a\sqrt{3}$; x – oznacza wysokość tego trójkąta poprowadzoną na bok BC. Ze wzorów (**7.7b**) i (**7.5a**) otrzymujemy $a\sqrt{2}\cdot a=a\sqrt{3}\cdot x$, skąd $x=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, czyli $3x=a\sqrt{6}$.

9.4. C (9.5P)

W pięciokącie foremnym żadne dwa boki nie są równoległe. W sześcianie ściany są parami równoległe i są trzy takie pary. Jeśli płaszczyzna przecina dwie ściany równoległe, to krawędzie przecięcia są równoległe (**9.1**), więc co najwyżej trzy boki wielokąta będącego przekrojem mogą być parami nierównoległe. A zatem pięciokąt foremny nie może być przekrojem sześcianu. Przekroje z punktów A, B, D są przedstawione na rysunkach poniżej.



9.5. B (9.1P)

Zauważamy, że $|AB_1|=|AC|$, więc trójkąt ACB_1 jest równoramienny, AO – środkowa poprowadzona na podstawę B_1C jest jednocześnie wysokością, skąd $AO\perp CB_1$. Odpowiedzi A i C odrzucamy, bo $AB\perp(BCC_1B_1)$, więc $|AB|$ jest odległością punktu A od ściany BCC_1B_1 oraz trójkąt ABC_1 jest prostokątny o przyprostokątnych AB i BC_1 , więc odcinek AO nie jest prostopadły do odcinka BC_1 . Z kolei odpowiedź D jest niepoprawna, bo $\Delta ABO\equiv\Delta D_1C_1O$.

9.6. C (9.2P)

Wyznaczamy rzut prostokątny danej przekątnej na płaszczyznę sąsiedniej ściany bocznej. Płaszczyzna podstawy jest prostopadła do ściany bocznej, więc kierunek rzutu punktu przekątnej należącego do tej podstawy jest wyznaczony przez prostą prostopadłą do krawędzi wspólnej podstawy i ściany bocznej (rzutni).

9.7. D (9.1P)

Suma miar kątów w podstawach jest równa $2\cdot 180°(n-2)$, a suma miar kątów w ścianach bocznych wynosi $360°\cdot n$, zatem $2\cdot 180°\cdot(n-2)+360°\cdot n=360°\cdot(2n-2)=720°\cdot(n-1)$, gdzie $n\in N$ i $n>2$.

9.8. C (9.1P)

Przekątna AC_1 sześcianu ma punkty wspólne z sześcioma krawędziami sześcianu. Pozostałe sześć krawędzi jest skośnych do tej przekątnej.

9.9. A (9.1P, 9.6P)

Niech krawędź podstawy ma długość a. Przekrój płaszczyzną zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne jest trójkątem równobocznym, skąd krawędź boczna ma długość $2a$. Ściana boczna jest trójkątem równoramiennym o bokach długości $2a$, $2a$, a, kąt (ostry) α znajduje się naprzeciwko boku długości a. Obliczamy $\cos\alpha$ ze wzoru (**7.14**): $a^2=(2a)^2+(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 2a\cdot\cos\alpha$, skąd $\cos\alpha=0{,}875$. W przedziale $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ funkcja $y=\cos x$ jest malejąca; ponieważ $\cos\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$, więc $\alpha\in(0°,30°)$. Wartość cosinusa α można obliczyć również w następujący sposób: obliczamy $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{0{,}5a}{2a}=\frac{1}{4}$, następnie korzystamy ze wzoru (**6.7b**).

9.10. A (11.1G, 11.2G)

Oznaczamy przez a krawędź sześcianu; objętość czworościanu foremnego jest równa $a^3-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\right)\cdot a$, czyli $\frac{1}{3}a^3$.

9.11. A (10.14G, 9.2P)

Zobacz (**9.9a**). Aby się przekonać, że odpowiedzi B, C, D, są fałszywe, wystarczy rozważyć ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest prostokąt (niebędący kwadratem), a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem symetrii tego prostokąta.

9.12. D (7.5R, 9.2P, 9.6P)

Niech h oznacza wysokość ostrosłupa, h = 9 cm, r – promień okręgu opisanego na jego podstawie. Z własności (**9.9a**) i ze wzoru (**6.2**) mamy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{r}$. Z twierdzenia sinusów (**7.15**) otrzymujemy $\frac{6}{\sin 150°}=2r$, skąd $r=6$ cm, więc $\operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

9.13. B (10.14G, 9.2P)

Zobacz (**9.11**). Aby się przekonać, że odpowiedzi A, C, D są fałszywe, wystarczy rozważyć ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest romb (niebędący kwadratem), a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem symetrii tego rombu.

9.14. D (9.1P)

Z warunków zadania wynika, że ściany boczne ostrosłupa są trójkątami równobocznymi. Suma miar kątów płaskich przy wierzchołku ostrosłupa jest mniejsza niż $360°$. Zatem $n\cdot 60°<360°$ i $n\geq 3$, skąd $n\in\{3,4,5\}$.

9.15. A (9.2R, 7.4R)

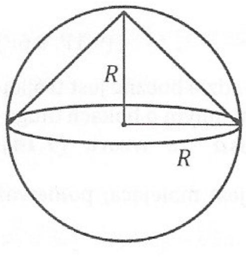
Przekrój i podstawa ostrosłupa to figury podobne. Jeśli k, $k>0$, jest skalą podobieństwa, to $k^2=2$, zatem $k=\sqrt{2}$. Jeśli wysokość ostrosłupa jest równa h, a płaszczyzna przekroju przecięła wysokość w odległości x od wierzchołka, to $\frac{h}{x}=\sqrt{2}$, czyli $x=\frac{1}{\sqrt{2}}h$. Tak więc $\frac{x}{h-x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}h}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}h}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

9.16. D (11.2P, 7.4R)

<u>I sposób</u> – Obliczamy objętość małego stożka w zależności od wysokości i promienia podstawy dużego stożka. Niech h i r oznaczają odpowiednio wysokość i promień podstawy danego stożka, $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$. Mały stożek ma wysokość $\frac{1}{2}h$ i promień podstawy $\frac{1}{2}r$, a zatem jego objętość (**9.13**) jest równa $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}r\right)^2\cdot\frac{1}{2}h$, co stanowi $\frac{1}{8}V$. Wobec tego bryła po odcięciu małego stożka ma objętość $\frac{7}{8}V$.

II sposób – Korzystamy z własności podobieństwa figur przestrzennych. Mały stożek jest podobny do dużego w skali $k=\frac{1}{2}$.
Wobec tego (**9.16**) objętość małego stożka jest równa $k^3 \cdot V$, czyli $\frac{1}{8}V$. Objętość bryły jest równa $\frac{7}{8}V$.

9.17. B (11.2G)



Niech R oznacza promień kuli. Wówczas objętość kuli jest równa $\frac{4}{3}\pi R^3$, zaś objętość stożka wynosi $\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R$, czyli jest cztery razy mniejsza od objętości kuli.

9.18. D (11.2G)

Punkt przecięcia przekątnych sześcianu jest środkiem obu sfer. Niech R oznacza promień większej sfery, natomiast r – promień mniejszej sfery. Wówczas $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r=\frac{1}{2}a$, gdzie a – długość krawędzi sześcianu. Ze wzoru (**9.14**) mamy

$P=4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi a^2$; $p=4\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\pi a^2$; stąd $P=3p$.

9.19. C (11.2G)

Objętość wrzuconej do naczynia kuli jest równa objętości wypartej wody, czyli $36\,\pi$ cm³. Niech r oznacza promień kuli. Ze wzoru (**9.14**) mamy $\frac{4\pi}{3}r^3=36\pi$, skąd $r=3$ (cm).

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

9.20. | 2 | 5 | 9 | (9.2P, 9.6P, 6.5R)

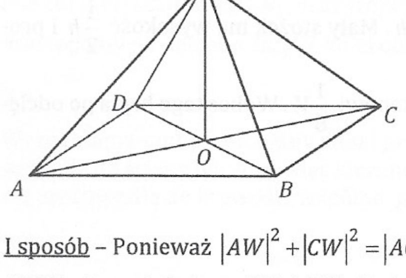
Zauważamy, że wszystkie ściany ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 75°, więc spodek wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę (zobacz (**9.11**)). Ze wzoru (**6.2**) otrzymujemy $\frac{r}{10}=\cos 75°$, gdzie r – promień tego okręgu; Na podstawie (**6.6c**) obliczamy: $\cos 75°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}25882$ (przybliżenie znajdujemy na kalkulatorze). Tak więc $r\approx 2{,}59$. Przybliżoną wartość cos75° możemy również odczytać w tablicach matematycznych, dostępnych na maturze.

9.21. | 4 | 1 | 6 | (9.1P, 9.6P)

Ostrosłup jest prosty, spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie (**9.9a**). Ponieważ pole podstawy jest równe $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48$, więc ze wzoru (**7.5c**) obliczamy promień R tego okręgu: $48=\frac{10\cdot 10\cdot 12}{4R}$, skąd $R=\frac{25}{4}$. Zatem $\sin\alpha=\frac{25}{4\cdot 15}=\frac{5}{12}=0{,}41666...$

9.22. (9.1P, 9.6P)

W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.



Jeśli kąty między ramionami mają miarę po 60°, to znaczy, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi, czyli wszystkie krawędzie ostrosłupa mają taką samą długość. Oznaczmy tę długość przez a. Rozważmy trójkąt ACW (zobacz rysunek obok). Mamy: $|AW|=a$, $|CW|=a$, $|AC|=a\sqrt{2}$. Pokażemy, że $|\angle ACW|=90°$ na dwa sposoby.

I sposób – Ponieważ $|AW|^2+|CW|^2=|AC|^2$, więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa (**7.9**) trójkąt ACW jest prostokątny, $AW\perp CW$. Podobnie można pokazać, że $DW\perp BW$, c.k.d.

<u>II sposób</u> – Prowadzimy w trójkącie równoramiennym ACW wysokość poprowadzoną na podstawę AC. Otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne przystające. Ponieważ $\cos|\angle A|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $|\angle A|=45^\circ=|\angle C|$ i $|\angle AWC|=180^\circ-2\cdot45^\circ=90^\circ$. Analogicznie miary kątów w trójkącie DBW są równe 45°, 45°, 90°, c.k.d.

9.23. (9.1P, 11.2G)

<u>I sposób</u> – Przyjmijmy oznaczenia: $|AD|=a$, $|BD|=b$, $|CD|=c$. Wówczas: $P_1=\frac{1}{2}ab$, $P_2=\frac{1}{2}bc$, $P_3=\frac{1}{2}ac$ oraz

$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)\cdot c=\frac{abc}{6}$ (zobacz (**9.8**)). Z drugiej strony $\frac{\sqrt{2\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3}}{3}=\frac{\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{2}bc\cdot\frac{1}{2}ac}}{3}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2c^2}}{3}=\frac{abc}{6}=V$, c.k.d.

<u>II sposób</u> – Przy oznaczeniach jak w I sposobie mamy: $V=\frac{1}{3}\cdot P_1\cdot c$, $V=\frac{1}{3}\cdot P_a\cdot a$, $V=\frac{1}{3}\cdot P_3\cdot b$, stąd $V^3=\frac{1}{27}\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot abc$,

$V^3=\frac{1}{27}\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot 6\cdot\frac{abc}{6}$, $V^3=\frac{2}{9}\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot V$, $V^2=\frac{2}{9}\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3$. Ostatecznie otrzymujemy $V=\frac{\sqrt{2\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3}}{3}$.

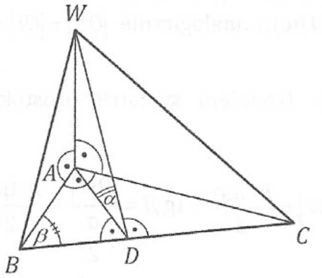
9.24. (9.6P, 6.5R)

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku obok. Z twierdzenia (**9.4**) wynika, że $|\angle ADW|=\alpha$. Wtedy (**6.2**) $|AB|=a\cos\beta$, $|AC|=a\sin\beta$, skąd $P_{ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin\beta\cos\beta$.

Ponadto $|AD|=a\sin\beta\cos\beta$ oraz $|AW|=a\sin\beta\cos\beta\,\mathrm{tg}\alpha$. Obliczamy objętość V ostrosłupa:

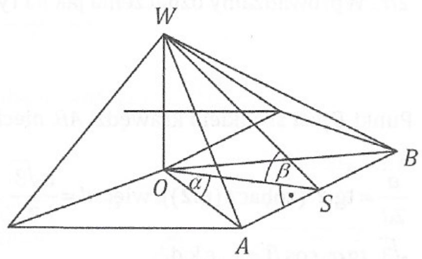
$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\sin\beta\cos\beta\cdot a\sin\beta\cos\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{6}a^3\sin^2\beta\cos^2\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha=\frac{a^3}{24}\sin^2 2\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha$,

c.k.d. W ostatnim przekształceniu wykorzystaliśmy wzór (**6.7a**).



9.25. (9.2P, 9.6P)

Rysunek obok przedstawia fragment prawidłowego ostrosłupa n-kątnego. Wprowadzamy oznaczenia: $|AB|=a$, $|OW|=\frac{a}{2}$, $|\angle AOS|=\frac{1}{2}|\angle AOB|=\alpha$, $\angle\beta$ – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Mamy $\alpha=\frac{1}{2}|\angle AOB|=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n}$.



<u>I sposób</u> – Korzystamy z przystawania trójkątów prostokątnych, $\Delta OSA\equiv\Delta OSW$ (cecha bbb, (**7.10a**)), mamy bowiem OS – wspólna przyprostokątna, $|OW|=|AS|=\frac{a}{2}$. $|OA|=|WS|$ (z twierdzenia Pitagorasa). Zatem $|\angle SOA|=\alpha=\frac{180^\circ}{n}=|\angle OSW|=\beta$, c.k.d.

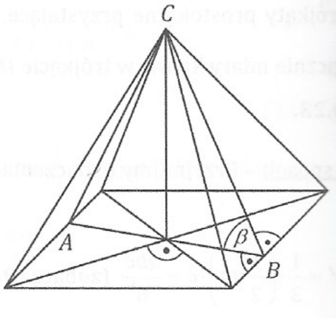
<u>II sposób</u> – Korzystamy z własności funkcji tangens. Mamy $\mathrm{tg}\beta=\frac{|OW|}{|OS|}=\frac{\frac{a}{2}}{|OS|}=\frac{|AS|}{|OS|}=\mathrm{tg}\alpha$ i $\alpha,\beta\in(0^\circ,90^\circ)$. W przedziale $(0^\circ,90^\circ)$ funkcja tangens dla różnych argumentów przyjmuje różne wartości, więc $\beta=\alpha=\frac{180^\circ}{n}$, c.k.d.

9.26. a) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ b) $\mathrm{tg}\beta=3$ (9.2P, 9.6P, 7.2R)

a) Ostrosłup jest prosty (**9.9a**); spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, w tym przypadku środkiem przeciwprostokątnej. Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy wysokość H ostrosłupa: $H=\sqrt{13^2-5^2}=12$. A zatem $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

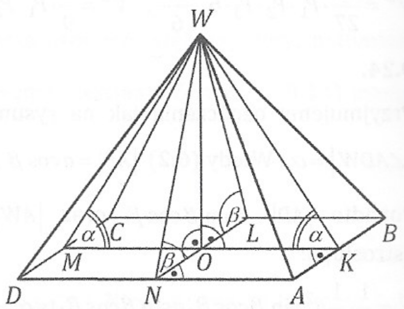
b) Ze środka przeciwprostokątnej trójkąta w podstawie prowadzimy odcinek prostopadły do krótszej przyprostokątnej; jest on równoległy do trzeciego boku trójkąta. Z twierdzenia Talesa dzieli on bok długości 6 na połowy, z twierdzenia (**7.13**) ma długość 4. Wysokość ściany bocznej o najmniejszym polu oraz poprowadzony odcinek wyznaczają kąt β. Wobec tego $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{12}{4}=3$.

9.27. $\beta=60^\circ$ (9.2P, 10.7G, 10.22G)



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe $4\cdot\frac{1}{2}a\cdot h$, gdzie a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość ściany bocznej, $2ah=75\left(\mathrm{cm}^2\right)$. Z twierdzenia Pitagorasa $a^2=\left(\frac{15}{4}\right)^2+5^2=\frac{625}{16}$, skąd $a=\frac{25}{4}$. A zatem $\frac{25}{2}h=75$, czyli $h=6\,(\mathrm{cm})$. Obliczamy wysokość H rombu (wzory **(7.28a)**, **(7.28c)**): $\frac{25}{4}\cdot H=\frac{1}{2}\cdot 7{,}5\cdot 10$, skąd $H=6\,(\mathrm{cm})$. Trójkąt ABC jest równoboczny, więc $\beta=60^\circ$.

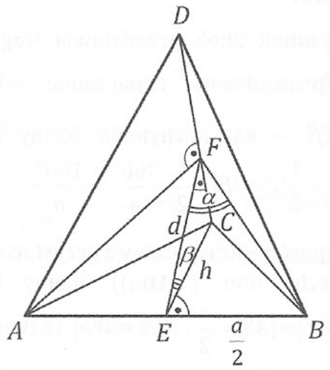
9.28. $\mathrm{tg}\beta=\frac{b}{a}\mathrm{tg}\alpha$ (9.2P, 9.6P)



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Punkt O – spodek wysokości ostrosłupa. Zauważamy, że $|OK|=|OM|=\frac{b}{2}$, bo $\Delta OKW\equiv\Delta OMW$ (cecha kbk, **(7.10c)**); analogicznie $|ON|=|OL|=\frac{a}{2}$, bo $\Delta OLW\equiv\Delta ONW$. Tak więc punkt O jest środkiem symetrii prostokąta $ABCD$. Obliczamy: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{|OW|}{\frac{b}{2}}$, skąd

$$|OW|=\frac{b\cdot\mathrm{tg}\alpha}{2}\text{; }\mathrm{tg}\beta=\frac{|OW|}{\frac{a}{2}}=\frac{b\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot 2}{2\cdot a}=\frac{b\cdot\mathrm{tg}\alpha}{a}.$$

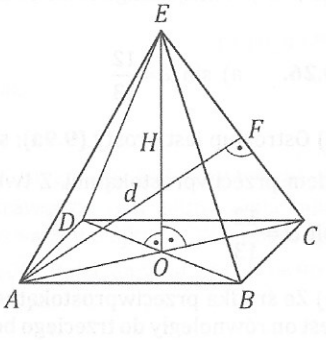
9.29. (9.2P, 9.6P)



Przekrój jest trójkątem równoramiennym, którego kąt między ramionami jest równy 2α. Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku obok.

Punkt E jest środkiem krawędzi AB, niech $|AB|=a$. Wówczas $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{d}{h}=\cos\beta$, $\frac{a}{2d}=\mathrm{tg}\alpha$ (zobacz **(6.2)**), więc $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\beta$ oraz $a=2d\cdot\mathrm{tg}\alpha$, skąd $\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\beta=1$, c.k.d.

9.30. $d=\frac{2aH}{\sqrt{2H^2+a^2}}$ (9.1P, 10.9G, 7.3P)



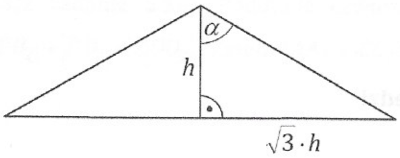
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Na rysunku obok odcinek AF jest wysokością trójkąta ACE, $|AF|=d$.

<u>I sposób</u> – Korzystamy ze wzoru na pole P trójkąta ACE: $P=\frac{a\sqrt{2}\cdot H}{2}$. Z drugiej strony $P=\frac{1}{2}|EC|\cdot d$. Obliczamy $|EC|$ z twierdzenia Pitagorasa: $H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=|EC|^2$, skąd $|EC|=\frac{\sqrt{4H^2+2a^2}}{2}$. Mamy $a\sqrt{2}\cdot H=\frac{\sqrt{4H^2+2a^2}}{2}\cdot d$; czyli $d=\frac{2aH}{\sqrt{2H^2+a^2}}$.

<u>II sposób</u> – Korzystamy z podobieństwa trójkątów ACF i EOC, gdzie O – spodek wysokości ostrosłupa. (kąt ACE wspólny, $|\angle EOC| = |\angle AFC| = 90°$, cecha kkk, **(7.11a)**). Wówczas $\frac{|AF|}{|EO|} = \frac{|AC|}{|EC|}$, czyli $d \cdot |EC| = H \cdot a\sqrt{2}$. Następnie obliczamy $|EC|$ jak w I sposobie.

9.31. (9.3P, 9.6P)

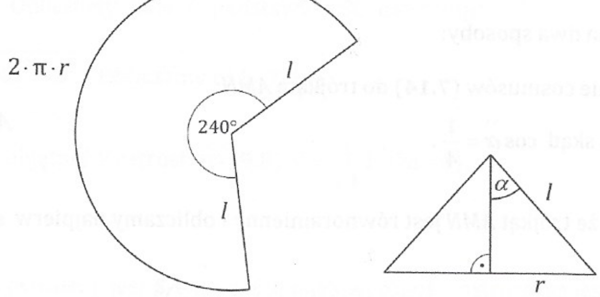
Oznaczamy: R – promień podstawy (walca i stożka), h – wysokość (walca i stożka). Pola powierzchni bocznych brył **(9.12)**, **(9.13)** są równe, więc $\pi R\sqrt{h^2+R^2} = 2\pi Rh$, skąd $R = \sqrt{3}h$. Niech rysunek poniżej przedstawia przekrój osiowy stożka, 2α – kąt rozwarcia stożka.



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}h}{h} = \sqrt{3}$ i $\alpha \in (0°, 90°)$, więc $\alpha = 60°$, skąd $2\alpha = 120°$, c.k.d.

9.32. $\frac{1}{9}$ (10.4G, 9.3P, 9.6P, 6.5R)

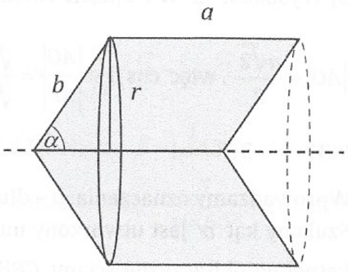
Niech l oznacza tworzącą stożka, r – promień podstawy stożka 2α – kąt rozwarcia stożka.



Ponieważ $\frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{240°}{360°}$, więc $\frac{r}{l} = \frac{2}{3}$; z drugiej strony $\frac{r}{l} = \sin\alpha$. Ze wzoru **(6.7b)** mamy $\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$.

9.33. (11.2G, 9.6P)

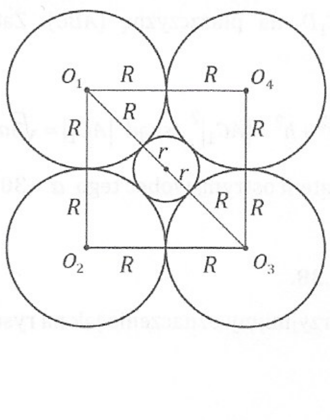
Niech α oznacza miarę kąta ostrego równoległoboku. Wówczas r – promień podstawy stożka równy $b\sin\alpha$. Jeśli od bryły odetniemy stożek i przeniesiemy w miejsce wyciętego stożka, to otrzymamy walec o promieniu podstawy r i wysokości a; zatem $V_1 = \pi \cdot ab^2 \cdot \sin^2\alpha$. Analogicznie, obracając równoległobok wokół boku b otrzymamy bryłę, której objętość jest równa objętości walca o promieniu podstawy $a\sin\alpha$ i wysokości b, czyli $V_2 = \pi \cdot ba^2 \cdot \sin^2\alpha$. A zatem $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot ab^2 \cdot \sin^2\alpha}{\pi \cdot ba^2 \cdot \sin^2\alpha} = \frac{b}{a}$.



9.34. 2 cm (9.3P, 9.1R)

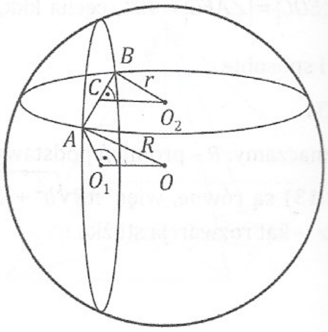
Niech rysunek poniżej przedstawia przekrój czterech kul płaszczyzną przechodzącą przez środki O_1, O_2, O_3, O_4 tych kul.

Niech R oznacza promień każdej z czterech identycznych kul, a r – promień piątej kuli. Zauważamy, że $2r = |O_1O_3| - 2R$, czyli $2r = 4$, $r = 2\,(\text{cm})$.



9.35. $r = 25$ (9.3P, 9.1R)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

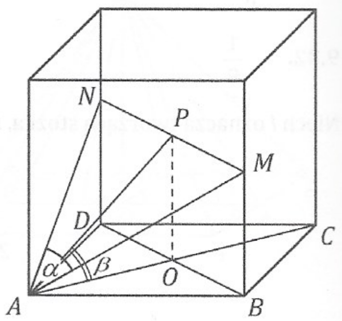


Punkt C jest środkiem odcinka AB. Trójkąty BCO_2 i AO_1O są prostokątne, $|CO_2| = |O_1O| = d$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 7^2 + d^2 = r^2 \\ r^2 + d^2 = \left(\sqrt{1201}\right)^2 \end{cases}$ skąd $\begin{cases} d = 24 \\ r = 25 \end{cases}$. Promień okręgów jest równy 25.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

9.36. a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (9.1P, 9.2P, 7.5R, 6.5R)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok: $|\angle MAN| = \alpha$, $|NP| = |PM|$, $|\angle OAP| = \beta$, $|\angle BAM| = |\angle DAN| = 30^\circ$, krawędź podstawy ma długość a.



a) Wyznaczamy długość boków trójkąta AMN i otrzymujemy: $|AM| = |AN| = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $|MN| = a\sqrt{2}$; $\cos\alpha$ obliczymy na dwa sposoby:

<u>I sposób</u> – Stosujemy twierdzenie cosinusów (**7.14**) do trójkąta AMN:

$$2a^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2}{3} - 2\cdot\frac{4a^2}{3}\cos\alpha \text{, skąd } \cos\alpha = \frac{1}{4}.$$

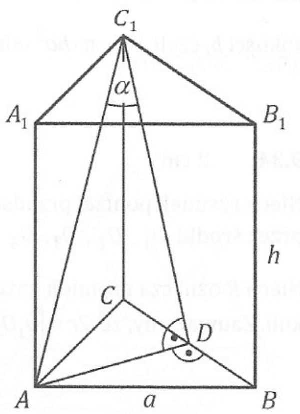
<u>II sposób</u> – Korzystamy z faktu, że trójkąt AMN jest równoramienny i obliczamy najpierw $\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Otrzymujemy

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$ Następnie stosujemy wzór (**6.7b**): $\cos\alpha = 1 - 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

b) Wysokość AP w trójkącie równoramiennym AMN, poprowadzona na podstawę MN ma długość $|AP| = \dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{6}}$. Ponieważ $|AO| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $\cos\beta = \dfrac{|AO|}{|AP|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

9.37. 30° (9.2P, 9.6P)

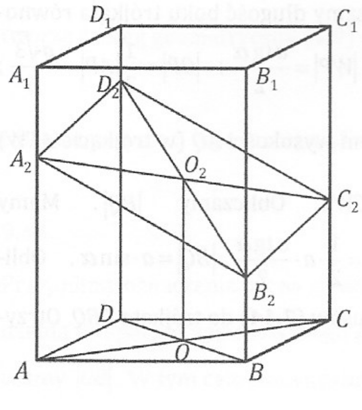
Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość graniastosłupa. Szukany kąt α jest utworzony między przekątną AC_1, a rzutem prostokątnym tej przekątnej na płaszczyznę ściany CBB_1C_1 czyli odcinkiem C_1D. Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych (**9.4**) $|\angle C_1DA| = 90^\circ$, bo $AD \perp CB$ i CD – rzut prostokątny odcinka C_1D na płaszczyznę (ABC). Zatem $\sin\alpha = \dfrac{|AD|}{|AC_1|}$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:



$a^2 + h^2 = |AC_1|^2$, skąd $|AC_1| = \sqrt{3}a$. Ponieważ $|AD| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, więc $\sin\alpha = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$, α jest kątem ostrym, wobec tego $\alpha = 30^\circ$.

9.38. (9.5P)

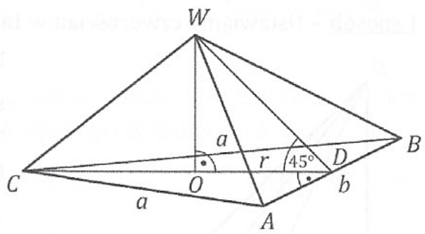
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



a) Ściany w prostopadłościanie są parami równoległe, zatem na mocy twierdzenia (**9.1**) otrzymujemy $A_2B_2 \,||\, C_2D_2$ oraz $A_2D_2 \,||\, B_2C_2$, co znaczy, że czworokąt $A_2B_2C_2D_2$ jest równoległobokiem.

b) Punkt O_2 jest punktem przecięcia przekątnych A_2C_2 i B_2D_2 równoległoboku $A_2B_2C_2D_2$. Jest więc punktem dzielącym te przekątne na połowy (**7.27**). Rozważmy czworokąt A_2ACC_2. Jest to trapez $(AA_2 \,||\, CC_2)$, w którym $|AA_2|+|CC_2|=2|OO_2|$ (zobacz zadanie 5.54). Podobnie czworokąt D_2DBB_2 jest trapezem, w którym $|BB_2|+|DD_2|=2|OO_2|$. Zatem $|AA_2|+|CC_2|=|BB_2|+|DD_2|$, c.k.d.

9.39. $\frac{1}{24}b^2(2a-b)$ (9.2P, 11.2G)



Z warunków zadania wynika, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę tego ostrosłupa (zobacz **9.11**). Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku obok.

$|OD|=r$ – promień okręgu wpisanego w podstawę ABC. Ponieważ $|\angle WDO|=45°$, więc trójkąt WDO jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, skąd $|OD|=r=|OW|=h$. Obliczamy pole P podstawy ABC ostrosłupa (**7.5a**) $P=\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2-b^2}$. Obliczamy r i h (**7.5d**): $r=h=\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2(2a+b)}$. Obliczamy objętość V ostrosłupa (**9.8**) $V=\frac{1}{24}b^2(2a-b)$.

9.40. $14\sqrt{3}$ (9.2P, 9.6P, 7.5R, 11.2G)

Na mocy (**9.9**) stwierdzamy, że ostrosłup jest prosty, zaś spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Wprowadzamy oznaczenia: H – wysokość ostrosłupa, R – promień okręgu opisanego na podstawie. Objętość ostrosłupa jest równa $V=\frac{1}{3}P_p\cdot H$ oraz $H=R\cdot \operatorname{tg}60°=R\sqrt{3}$. Obliczamy P_p i R.

<u>I sposób</u> – Korzystamy ze wzorów (**7.5e**), (**7.5c**) na pole trójkąta. Mamy $p=\frac{3+7+8}{2}=9$;

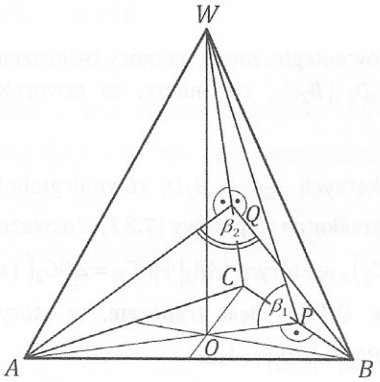
$P_p=\sqrt{9\cdot(9-3)\cdot(9-7)\cdot(9-8)}=6\sqrt{3}$. Wówczas $\frac{3\cdot 7\cdot 8}{4R}=6\sqrt{3}$, czyli $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$. Zatem $V=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=14\sqrt{3}$.

<u>II sposób</u> – Korzystamy z twierdzenia cosinusów (**7.14**) i z twierdzenia sinusów (**7.15**). Niech $\beta=|\angle ABC|$. Wówczas $7^2=8^2+3^2-2\cdot 8\cdot 3\cdot\cos\beta$, czyli $\cos\beta=\frac{1}{2}$, skąd $\beta=60°$. Zatem $P_p=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\cdot\sin 60°=6\sqrt{3}$ oraz $\frac{7}{\sin 60°}=2R$, czyli $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$. Następnie objętość ostrosłupa obliczamy tak, jak w I sposobie.

9.41. a) $\cos\beta_1=\frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}\alpha}$; $\cos\beta_2=\frac{2\sin^2\alpha-1}{2\sin^2\alpha}\left(=\frac{-\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha}\right)$ b) $\alpha\in(30°,90°)$; $\beta_1\in(0°,90°)$, $\beta_2\in(60°,180°)$

(9.2P, 9.6P)

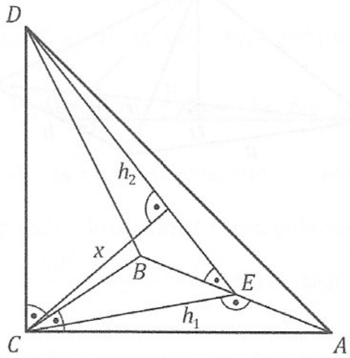
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku poniżej:



Punkt P jest środkiem krawędzi BC. Oznaczamy długość boku trójkąta równobocznego w podstawie przez a. Zatem $|WP|=\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2}$; $|OP|=\frac{1}{3}|AP|=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\cos\beta_1=\frac{|OP|}{|WP|}=\frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}\alpha}$. Punkt Q jest spodkiem wysokości AQ (w trójkącie ACW) i wysokości BQ (w trójkącie BCW). Obliczamy $|BQ|$. Mamy $\frac{1}{2}|CW|\cdot|BQ|=\frac{1}{2}|BC|\cdot|WP|$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2\cos\alpha}\cdot|BQ|=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2}$; $|BQ|=a\cdot\sin\alpha$. Obliczamy $\cos\beta_2$. Stosujemy twierdzenie cosinusów (**7.14**) do trójkąta ABQ. Otrzymujemy $\cos\beta_2=\frac{2\sin^2\alpha-1}{2\sin^2\alpha}\left(=\frac{-\cos2\alpha}{2\sin^2\alpha}\right)$.

9.42. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (9.2P, 10.9G, 11.2G)

<u>I sposób</u> – Ustawiamy czworościan w taki sposób, że podstawą jest jeden z trójkątów prostokątnych równoramiennych,

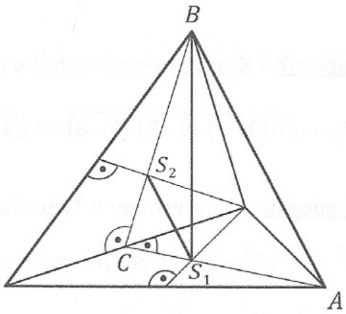


którego przyprostokątne mają długość $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. Prowadzimy wysokość h_1 podstawy i wysokość h_2 ściany bocznej, mające punkt wspólny E; $h_1=1$, $h_2=\sqrt{3}$. Trójkąt ECD jest prostokątny. Szukana odległość x jest wysokością trójkąta CDE, poprowadzoną na bok ED. Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta (**7.5a**) i (**7.7b**): $\frac{1}{2}\cdot h_2\cdot x=\frac{1}{2}\cdot h_1\cdot|CD|$, skąd $\sqrt{3}x=\sqrt{2}$, czyli $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

<u>II sposób</u> – Ustawiamy czworościan w taki sposób, że podstawą jest ściana o największym polu (ΔABD). Wtedy szukana odległość x jest wysokością ostrosłupa. Korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku 2. Wówczas $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2\sqrt{3}}{4}x$, czyli $V=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. Z drugiej strony $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|CA|\cdot|CB|\cdot|CD|$, skąd $V=\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}$. Zatem $\sqrt{3}x=\sqrt{2}$, czyli $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

9.43. 27:26 (11.1G, 11.2G, 5.3R)

Niech a oznacza długość krawędzi największego czworościanu foremnego. Rysunek obok przedstawia największy czworościan i krawędź S_1S_2 drugiego czworościanu. Wyznaczamy $|S_1S_2|$ w zależności od a.



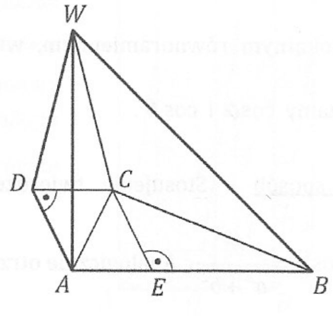
<u>I sposób</u> – Rozważamy przekrój największego czworościanu płaszczyzną (ABC). Mamy $\frac{|CS_1|}{|CS_2|}=\frac{|S_1A|}{|S_2B|}$, zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa (**7.25**) mamy $S_1S_2\,||\,AB$. Stąd trójkąty S_1S_2C i ABC są podobne; $\frac{|S_1S_2|}{|AB|}=\frac{|CS_1|}{|CA|}=\frac{1}{3}$, tak więc $|S_1S_2|=\frac{1}{3}|AB|=\frac{1}{3}a$.

<u>II sposób</u> – W trójkącie S_1CB mamy $\cos(\angle S_1CS_2)=\frac{1}{3}$. Następnie obliczamy: $|CS_1|=|CS_2|=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Stosujemy twierdzenie cosinusów (**7.14**) do trójkąta S_1CS_2 i obliczamy: $|S_1S_2|=\frac{1}{3}a$. Podobnie można wykazać, że krawędź każdego kolejnego czworościanu jest trzy razy krótsza od krawędzi poprzedniego czworościanu. Objętość V największego czworościanu jest równa $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, objętość V_1 drugiego czworościanu jest równa $\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3\sqrt{2}}{12}$, czyli $\frac{1}{27}\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, $\frac{1}{27}V$. Zatem objętość każdego kolejnego czworościanu jest 27 razy mniejsza od objętości poprzedniego czworościanu. Objętości czworościanów

tworzą szereg geometryczny (**4.9**) o pierwszym wyrazie $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ i ilorazie $q=\frac{1}{27}$; $q\in(-1,1)$, więc jest to szereg zbieżny.

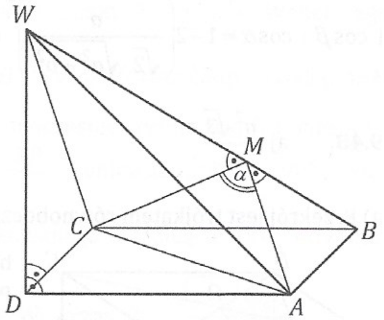
Obliczamy sumę S tego szeregu: $S=\frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{27}{26}\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{27}{26}V$.

9.44. (9.1P)



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Obliczamy $|AC|$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ACD otrzymujemy $|AC|=15$. Obliczamy $|CB|$. W tym celu prowadzimy wysokość CE trapezu i otrzymujemy trójkąt prostokątny CEB, w którym $|CE|=12$, $|EB|=16$. Do tego trójkąta stosujemy ponownie twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy $|CB|=20$. Następnie, na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa (**7.9**) otrzymujemy, że trójkąt ABC jest prostokątny. Mamy bowiem
$|AC|^2+|CB|^2=15^2+20^2=225+400=625=25^2=|AB|^2$.
Tak więc $AC\perp CB$. Odcinek AC jest rzutem prostokątnym krawędzi CW na płaszczyznę $(ABCD)$, bo z założenia AW jest wysokością ostrosłupa. Zatem, na mocy (**9.4**) $CW\perp CB$, czyli trójkąt WBC jest trójkątem prostokątnym, c.k.d.

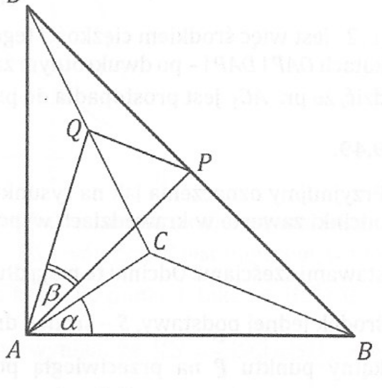
9.45. (9.2P, 9.6P, 6.5R)



Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku obok. Niech krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne DAW i DCW są trójkątami prostokątnymi, przystającymi (cecha bkb, (**7.10b**)). Rzutem prostokątnym krawędzi bocznej AW na płaszczyznę podstawy $(ABCD)$ jest krawędź AD, podobnie krawędzi CW – krawędź CD. Zatem $|\angle DAW|=|\angle DCW|=45^\circ$; $|DW|=a, |AW|=|CW|=a\sqrt{2}$. Ponadto podstawą ostrosłupa jest kwadrat, więc (**9.4**) otrzymujemy $|\angle BCW|=90^\circ=|\angle BAW|$. Niech punkt M należy do krawędzi BW oraz $AM\perp BW$ i $CM\perp BW$. Ściany ABW i CBW tworzą kąt, którego miara (oznaczamy ją α) jest równa mierze kąta płaskiego AMC. Wyznaczamy długości boków trójkąta AMC: $|AC|=a\sqrt{2}$, $|AM|=|CM|$. Długość odcinka AM wyznaczamy ze wzoru na pole trójkąta ABW: $\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot|BW|\cdot|AM|$.

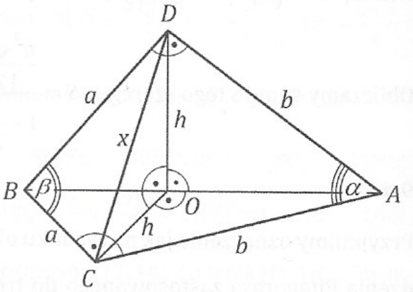
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABW mamy $|BW|=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}\,a$, więc $|AM|=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Z twierdzenia cosinusów (**7.14**) otrzymujemy $2a^2=\frac{2}{3}a^2+\frac{2}{3}a^2-2\cdot\frac{2}{3}a^2\cos\alpha$, czyli $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, skąd $\alpha=120^\circ$, c.k.d.

9.46. (9.1P, 6.5R)



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok oraz $|AB|=|AC|=|AD|=a$, $|BC|=x$.
Ponieważ $\Delta ABD\equiv\Delta ACD$ (**7.10b**), więc $|BD|=|CD|=a\sqrt{2}$ i $|AP|=|AQ|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Stosujemy twierdzenie cosinusów (**7.14**) w trójkącie ABC. Mamy:
$x^2=a^2+a^2-2a^2\cos\alpha$, skąd (1) $\frac{1}{4}x^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\cos\alpha$; $|PQ|=\frac{1}{2}x$ (**7.13**).
Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta APQ.
$\frac{1}{4}x^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\beta$ (2) $\frac{1}{4}x^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-a^2\cos\beta$.
Przyrównujemy prawe strony równości (1) i (2)
$\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\cos\alpha=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-a^2\cos\beta$, czyli $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha=1-\cos\beta$, skąd $2\cos\beta=\cos\alpha+1$, c.k.d.

9.47. (9.2P, 9.6P, 7.5R, 6.5R)



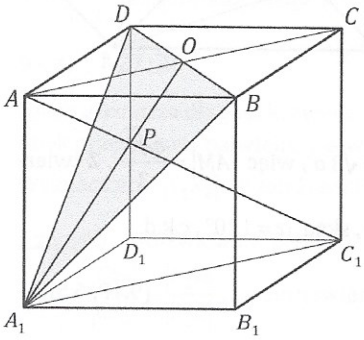
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku obok. $|BC|=|BD|=a$, $|AC|=|AD|=b$, $|CD|=x$; h – wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzoną na przeciwprostokątną. Mamy: $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$. Wyznaczamy h, x w zależności od a i b. $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ **(7.5a)**; $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Trójkąt COD jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, więc $x=\sqrt{2}\cdot h$, czyli $x=\frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Wyznaczamy $\cos\alpha$ i $\cos\beta$.

<u>I sposób</u> – Stosujemy twierdzenie cosinusów **(7.14)** do trójkątów CAD i BCD. $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}=2b^2-2b^2\cos\alpha$, skąd $\cos\alpha=\frac{b^2}{a^2+b^2}$. Analogicznie otrzymujemy $\cos\beta=\frac{a^2}{a^2+b^2}$. Zatem $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}=1$, c.k.d.

<u>II sposób</u> – Korzystamy z faktu, że trójkąty CAD i BCD są trójkątami równoramiennymi. Obliczamy $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\sin\frac{\beta}{2}$. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{b}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$. Następnie korzystamy dwukrotnie ze wzoru **(6.7b)** i wyznaczamy $\cos\alpha$ i $\cos\beta$: $\cos\alpha=1-2\left(\frac{a}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{b^2}{a^2+b^2}$. Podobnie $\cos\beta=\frac{a^2}{a^2+b^2}$, więc $\cos\alpha+\cos\beta=1$, c.k.d.

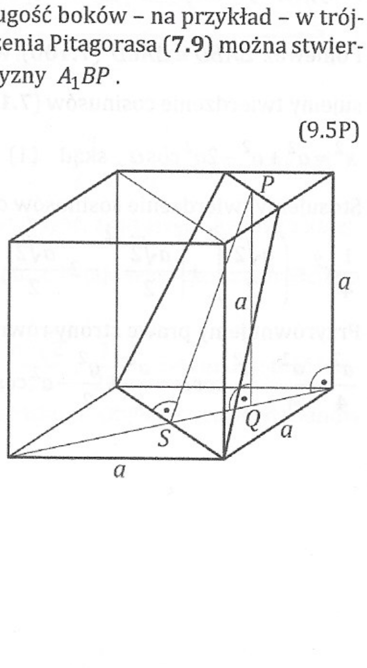
9.48. a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (9.2P, 9.5P)

a) Przekrój jest trójkątem równobocznym o boku długości $a\sqrt{2}$.



b) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.
Płaszczyzna przekroju (A_1BD) przecina płaszczyznę (AA_1C_1C) zawierającą przekątną AC_1 wzdłuż prostej A_1O. Proste A_1O i AC_1 przecinają się w punkcie, który oznaczamy jako P. Rozważamy trapez AA_1C_1O. Mamy $\frac{|AO|}{|A_1C_1|}=\frac{1}{2}=\frac{|AP|}{|C_1P|}$ (ostatnie dwie równości wynikają z podobieństwa trójkątów OAP i A_1C_1P ; zobacz **(7.11)**), a to znaczy, że punkt P dzieli przekątną AC_1 w stosunku $1:2$. Aby wykazać, że prosta AC_1 jest prostopadła do płaszczyzny (A_1BD) stosujemy **(9.2b)**. Odcinek A_1O jest wysokością w trójkącie równobocznym A_1BD i punkt P dzieli tę wysokość w stosunku $1:2$, jest więc środkiem ciężkości tego trójkąta. To spostrzeżenie pozwala obliczyć długość boków – na przykład – w trójkątach OAP i DAP i – po dwukrotnym zastosowaniu twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa **(7.9)** można stwierdzić, że pr. AC_1 jest prostopadła do prostych OP i DP, więc jest prostopadła do płaszczyzny A_1BP .

9.49. (9.5P)



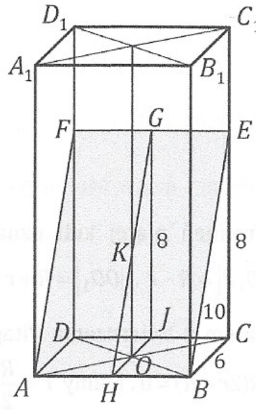
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Na mocy **9.1** podstawami trapezu są odcinki zawarte w krawędziach wspólnych płaszczyzny przekroju z dwiema podstawami sześcianu. Odcinki te mają długość $a\sqrt{2}$ oraz $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Niech punkt P oznacza środek jednej podstawy, S – środek drugiej podstawy trapezu, zaś Q – rzut prostokątny punktu P na przeciwległą podstawę sześcianu. Wówczas $|QS|=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|PQ|^2+|QS|^2=|PS|^2$, skąd

$|PS|=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{8}}=\frac{3a}{\sqrt{8}}$. Obliczamy pole P_t trapezu **(7.26)**

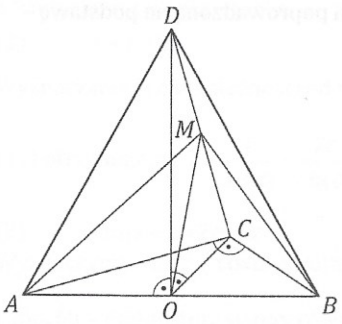
$$P_t = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{8}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{8}a^2.$$

9.50. 60cm^2 (9.5P)



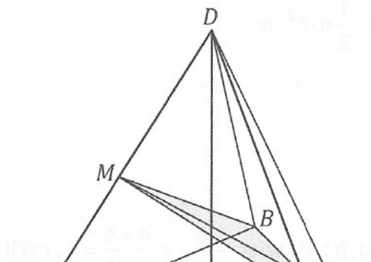
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Ściany prostopadłościanu są parami równoległe, zatem **(9.1)** $AF \| BE$ i $AB \| FE$, czyli przekrój $ABEF$ jest równoległobokiem. Ponieważ $\text{pr.}\,AB \perp \text{pr.}\,BB_1$ i $\text{pr.}\,AB \perp \text{pr.}\,BC$, więc (zobacz **(9.2)**) $\text{pr.}\,AB \perp \text{pr.}\,BE$, czyli równoległobok $ABEF$ jest prostokątem. Z warunków zadania wiemy, że $|KO| = 4$ cm. Punkt O jest środkiem odcinka HJ, podobnie punkt K jest środkiem odcinka HG. Zatem na mocy **(7.13)** mamy $|GJ| = 2 \cdot |KO| = 8\,\text{cm}$, $|CE| = |GJ| = 8\,\text{cm}$, $|BC| = 6\text{cm}$, więc z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCE otrzymujemy $|BE| = 10\text{cm}$. Tak więc pole przekroju $ABEF$ jest równe $6 \cdot 10\ (\text{cm}^2)$, czyli 60 cm^2.

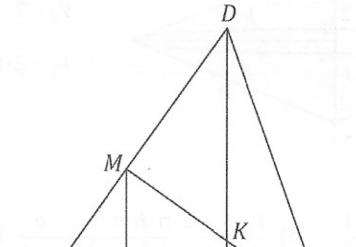
9.51. $\dfrac{\sqrt{64P^2 - c^4}}{4}$ (9.2R)



Spodkiem wysokości ostrosłupa jest środek okręgu opisanego na podstawie, w tym przypadku środek przeciwprostokątnej podstawy, punkt O; $|OC| = \frac{c}{2}$. Wobec tego $P_s = \frac{1}{2}c \cdot H$, gdzie P_s oznacza pole ściany ABD, H – wysokość ostrosłupa. Trójkąt ABM jest równoramienny, więc środkowa OM jest jednocześnie wysokością (h) poprowadzoną na bok AB. Mamy $\frac{h \cdot c}{2} = P$, skąd $h = \frac{2P}{c}$. Ponieważ $|\angle DOC| = 90°$, więc $|DC| = 2h = \frac{4P}{c}$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego w trójkącie DOC otrzymujemy $H^2 = \left(\frac{4P}{c}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$, skąd $H = \frac{\sqrt{64P^2 - c^4}}{2c}$. Wówczas $P_s = \frac{\sqrt{64P^2 - c^4}}{4}$.

9.52. (9.2R)

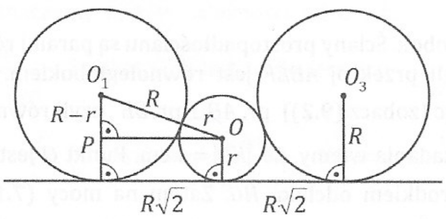




Przekrój ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym ABM, którego wysokość ME jest jednocześnie środkową w trójkącie CDE. Zatem ME zawiera się w płaszczyźnie (ECD), podobnie jak DS. Niech $\{K\} = ME \cap DS$; wówczas K jest punktem, w którym przekrój (ABM) dzieli wysokość DS. Szkicujemy trójkąt ECD i zaznaczamy na boku EC punkt L taki, że $|LS| = |LC|$. Z **(7.13)** mamy $ML \| DS$ oraz $|ML| = \frac{1}{2}|DS|$. Z własności ostrosłupa prawidłowego wynika, że $|ES| = \frac{1}{2}|SC| = |SL|$, więc $\frac{|ML|}{|KS|} = \frac{|EL|}{|ES|} = 2$, skąd $|KS| = \frac{1}{2}|ML| = \frac{1}{4}|DS|$; wówczas $|DK| = \frac{3}{4}|DS|$, więc $|DK| : |KS| = 3 : 1$, c.k.d.

9.53. $\frac{R}{2}$ (9.1R)

Niech rysunek poniżej przedstawia przekrój dwóch kul o promieniu *R*, które nie są styczne, płaszczyzną przechodzącą przez środki tych kul, prostopadłą do płaszczyzny, na której leżą kule.

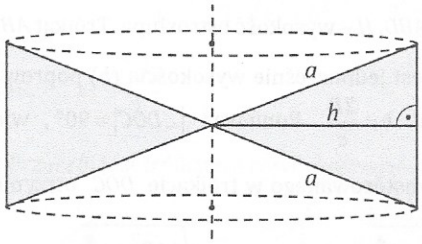


Promień piątej kuli oznaczamy przez *r*. Trójkąt OPO_1 (zobacz rysunek) jest trójkątem prostokątnym, w którym $|O_1P| = R - r$, $|OO_1| = R + r$, $|OP| = R\sqrt{2}$. (O_1O_3 jest przekątną kwadratu wyznaczonego przez cztery kule o promieniu *R*).
Zatem z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $(R-r)^2 + \left(R\sqrt{2}\right)^2 = (R+r)^2$ czyli $R^2 - 2Rr + r^2 + 2R^2 = R^2 + 2Rr + r^2$, skąd $R(2r - R) = 0$. Mamy $r = \frac{R}{2}$ lub $R = 0$ – sprzeczność. Promień piątej kuli jest równy $\frac{R}{2}$.

9.54. a) $\frac{1}{2}$ (11.2G)

Oznaczamy długości ramion trójkąta przez *a*, podstawy – przez *b* oraz wysokość trójkąta poprowadzoną na podstawę – przez *h*.

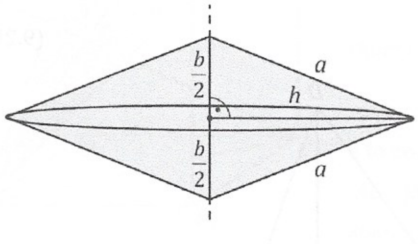
1)



$$V_1 = \pi \cdot h^2 \cdot b - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{2}{3} \pi \cdot h^2 \cdot b$$

$$P_1 = 2\pi \cdot h \cdot b + 2\pi \cdot h \cdot a = 2\pi h(a+b)$$

2)



$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \pi \cdot h^2 \cdot b$$

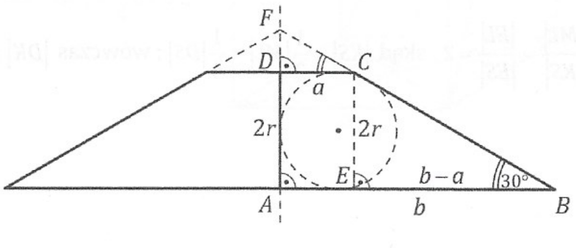
$$P_2 = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot a$$

a) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot b}{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot b} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot a}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot (a+b)} = \frac{a}{a+b}$ Ponieważ $a, b > 0$, więc $\frac{a}{a+b} < \frac{a+b}{a+b} = 1$, czyli $\frac{P_2}{P_1} < 1$.

Trójkąt równoramienny jest trójkątem ostrokątnym, więc $b < a\sqrt{2}$. Szacujemy
$\frac{P_2}{P_1} = \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a + a\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1$. Tak więc $\sqrt{2} - 1 < \frac{P_2}{P_1} < 1$, c.k.d.

9.55. $20\pi r^3$ (11.2G, 7.1R)

Niech rysunek obok przedstawia przekrój osiowy otrzymanej bryły. Oznaczamy: $|AB| = b$, $|CD| = a$. Ponadto mamy:



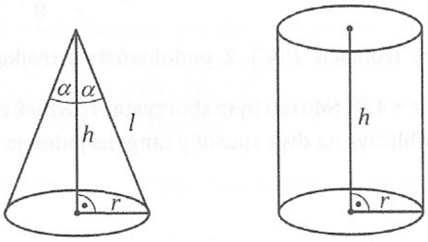
$|AD|=2r$ i $|BC|=4r$ $a+b=6r$ (**7.31c**) i $b-a=2r\sqrt{3}$ (rozważ trójkąt CEB). Stąd $a=r(3-\sqrt{3})$ i $b=r(3+\sqrt{3})$ oraz $|DF|=\frac{a}{\sqrt{3}}=r(\sqrt{3}-1)$. Szukana objętość V jest równa różnicy objętości dwóch stożków:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot b^2\left(2r+\sqrt{3}r-r\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot a^2\left(\sqrt{3}r-r\right)=\frac{1}{3}\pi r^3\left(3+\sqrt{3}\right)^2\left(1+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{3}\pi r^3\left(3-\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{3}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^3\left[30+18\sqrt{3}-\left(18\sqrt{3}-30\right)\right]=20\pi r^3$$

9.56. $\frac{7}{25}$ (11.2G, 6.6R)

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku poniżej; r - promień podstawy walca i stożka, h - wysokość walca i stożka, 2α - miara kąta rozwarcia stożka.



Z warunków zadania wynika, że $\pi r(r+l)=2\pi rh$ skąd

(1) $r+l=2h$

Wyznaczamy l i h w zależności od r i α. Mamy: $\frac{r}{l}=\sin\alpha$ skąd $l=\frac{r}{\sin\alpha}$ oraz $\frac{r}{h}=\operatorname{tg}\alpha$ więc $h=\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}$. Wracamy do równania (1) i otrzymujemy $r+\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$, a zatem

(2) $\sin\alpha+1=2\cos\alpha$

Wyznaczymy $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ dwoma sposobami.

<u>I sposób</u> - Podnosimy strony równania (2) do kwadratu: $(\sin\alpha+1)^2=4\cos^2\alpha$. Po zastosowaniu wzorów (**1.17a**) i (**6.3a**) i uporządkowaniu równania otrzymujemy $5\sin^2\alpha+2\sin\alpha-3=0$ skąd $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ lub $\sin\alpha=-1$. Ostanie rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, bo $\alpha\in(0°,90°)$, więc $\sin\alpha>0$. Jeśli $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ i $\alpha\in(0°,90°)$, to $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; otrzymane liczby spełniają równanie (2).

<u>II sposób</u> - Strony równania (2) przekształcamy stosując wzory (**6.7a**), (**6.7b**), (**6.3a**). $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+1=2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+4\sin^2\frac{\alpha}{2}=1$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+4\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+3\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\quad /:\cos^2\frac{\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}\neq 0$$

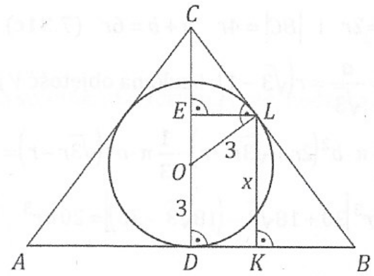
$2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=1$ skąd $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ lub $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-1$. Ostatnie rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, bo $\alpha\in(0°,90°)$, więc $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\in(0,1)$. Jeśli $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ i $\alpha\in(0°,90°)$, to $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$, więc

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$$

Jeśli znamy $\sin\alpha$ (lub $\cos\alpha$), to korzystając ze wzoru (**6.7b**) obliczamy $\cos2\alpha$; $\cos2\alpha=\frac{7}{25}$.

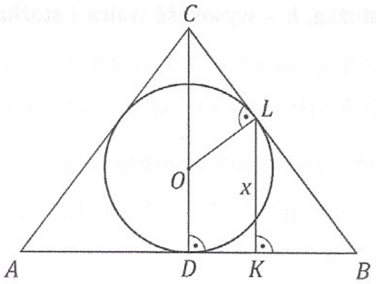
9.57. 4,8 (9.1R, 7.2P, 7.3P)

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku obok.



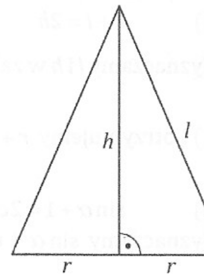
I sposób – Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta prostokątnego: $|EL|\cdot|OC|=|OL|\cdot|LC|$, czyli $|EL|=\frac{3\cdot 4}{5}=2{,}4$. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $|EO|^2=3^2-(2{,}4)^2$, skąd $|EO|=1{,}8$. Wówczas $x=3+1{,}8=4{,}8$.

II sposób – Korzystamy z twierdzenia o odcinkach stycznych i z podobieństwa trójkątów.



Mamy $|DB|=|LB|=r$, gdzie r oznacza promień podstawy stożka. Z podobieństwa trójkątów DBC i OLC obliczamy r: $\frac{3}{r}=\frac{4}{8}$; skąd $r=6$ (albo z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DBC). Z podobieństwa trójkątów DBC i KBL mamy: $\frac{8}{x}=\frac{10}{6}$, zatem $x=4{,}8$. (Można było skorzystać również z podobieństwa trójkątów OLC i KBL, albo obliczyć na dwa sposoby tangens jednego z kątów ostrych trójkąta DBC).

9.58. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (9.3P, 11.6R)



Niech rysunek obok przedstawia przekrój osiowy stożka; h – wysokość stożka, r – promień podstawy stożka, V – objętość stożka; $V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$, $r^2+h^2=l^2$ (z twierdzenia Pitagorasa).

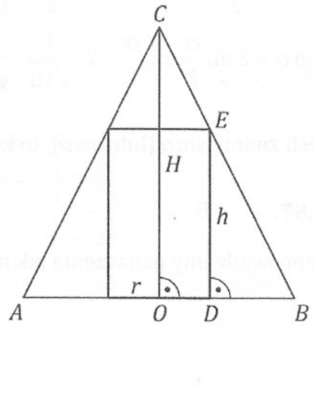
I sposób – Wyznaczamy objętość stożka w zależności od wysokości h. $V(h)=\frac{1}{3}\pi\left(l^2h-h^3\right)$, $h\in(0,l)$.

Funkcja V jest ciągła i różniczkowalna $V'(h)=\frac{1}{3}\pi\left(l^2-3h^2\right)$, $h\in(0,l)$; $V'(h)=0\Leftrightarrow h=\frac{l}{\sqrt{3}}$;

$V\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{h\to 0^+}V(h)=\lim\limits_{h\to l^-}V(h)=0$. Jeśli $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$, to objętość stożka jest największa, wtedy $r=\frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{3}}$. Niech α będzie kątem rozwarcia stożka o największej objętości. Wyznaczamy $\sin\alpha$ stosując wzory na pole trójkąta **(7.5a)**, **(7.5b)** do przekroju osiowego stożka $\frac{\sqrt{2}l^2}{3}=\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$, skąd $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

II sposób – Wyznaczamy objętość stożka w zależności od promienia podstawy r $V(r)=\frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4l^2-r^6}$, $r\in(0,l)$. Funkcja $y=a\sqrt{x}$, gdzie $a>0$, jest funkcją rosnącą, więc funkcja $V(r)=\frac{1}{3}\pi\sqrt{f(r)}$ będzie przyjmować największą wartość w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(r)=r^4l^2-r^6$, $r\in(0,l)$ będzie przyjmować największą wartość. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$, $r\in(0,l)$; $f'(r)=0\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{3}}$; $V\left(\frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{r\to 0^+}V(r)=\lim\limits_{r\to l^-}V(r)=0$. Jeśli $r=\frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{3}}$, to objętość stożka jest największa. Sinus kąta rozwarcia stożka o największej objętości obliczamy jak w I sposobie.

9.59. (9.3P, 11.6R)

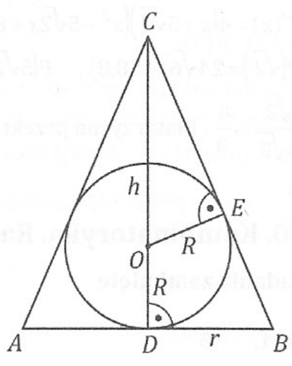


Niech R, H oznaczają odpowiednio promień podstawy i wysokość stożka, natomiast r, h – odpowiednio promień podstawy i wysokość walca. Wówczas $V_s=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$, $V_w=\pi\cdot r^2\cdot h$. Ponieważ trójkąty OBC i DBE są podobne (cecha kkk, **(7.11a)**), więc $\frac{H}{h}=\frac{R}{R-r}$, czyli $h=H-\frac{H}{R}\cdot r$. Wyznaczamy objętość walca w zależności od r: $V_w(r)=\pi r^2\cdot\left(H-\frac{H}{R}\cdot r\right)$; $V_w(r)=\pi H\cdot\left(r^2-\frac{1}{R}\cdot r^3\right)$, $r\in(0,R)$. Wtedy

$V_w'(r)=\pi H\left(2r-\frac{3}{R}\cdot r^2\right)$, $r\in(0,R)$. Zatem $V_w'(r)=0\Leftrightarrow r=\frac{2}{3}R$. Obliczamy $V_w\left(\frac{2}{3}R\right)=\pi\cdot\frac{4}{9}R^2\cdot\left(H-\frac{H}{R}\cdot\frac{2}{3}R\right)=\frac{4}{27}\pi\cdot R^2\cdot H$.

Ponieważ $\lim\limits_{r\to 0}V_w(r)=0$ oraz $\lim\limits_{r\to R}V_w(r)=0$ i V_w jest funkcją ciągłą, więc największa możliwa objętość walca jest równa $V_w\left(\frac{2}{3}R\right)$. Zatem $\frac{V_w}{V_s}=\frac{4}{9}$, c.k.d.

9.60. $4R$ (9.3P, 11.6R)



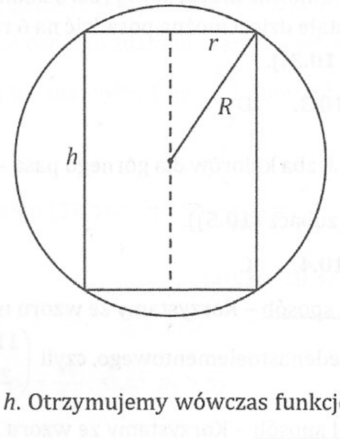
Niech rysunek obok przedstawia przekrój osiowy stożka. Oznaczamy: r – promień podstawy stożka, h – wysokość stożka, V – objętość stożka. $\Delta CDB\sim\Delta CEO$ (cecha kkk, **7.11a**), zatem $\frac{R}{h-R}=\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}}$, skąd $\sqrt{h^2+r^2}=\frac{(h-R)r}{R}$, $h^2+r^2=\frac{(h-R)^2r^2}{R^2}$; $r^2=\frac{R^2\cdot h}{h-2R}$;

$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$; $V(h)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2\cdot h^2}{h-2R}$, $h\in(2R,+\infty)$. Funkcja $y=V(h)$ jest ciągła i różniczkowalna. Wyznaczamy pochodną: $V'(h)=\frac{1}{3}\pi R^2\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}$, $h\in(2R,+\infty)$, czyli

$V'(h)=\frac{1}{3}\pi R^2\frac{h^2-4hR}{(h-2R)^2}$, $h\in(2R,+\infty)$. Obliczamy: $V'(h)=0\Leftrightarrow h=4R$; $V(4R)=\frac{8}{3}\pi R^3$;

$\lim\limits_{h\to 2R^+}V(h)=\lim\limits_{h\to+\infty}V(h)=+\infty$. Najmniejszą objętość ma stożek o wysokości $4R$.

9.61. $r=\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $h=R\sqrt{2}$ (9.3P, 11.6R)

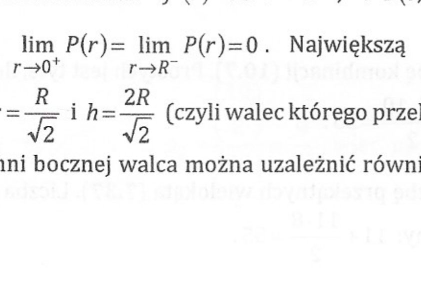


Niech rysunek obok przedstawia przekrój osiowy walca i kuli; P – pole powierzchni bocznej, $P=2\pi rh$; $h=2\sqrt{R^2-r^2}$ (z twierdzenia Pitagorasa); $P(r)=4\pi\sqrt{R^2r^2-r^4}$, $r\in(0,R)$. Przyjmujemy: $f(r)=R^2r^2-r^4$, $r\in(0,R)$. Funkcja $y=a\sqrt{x}$, $a>0$, jest funkcją rosnącą, więc funkcja $y=4\pi\sqrt{f(r)}$ będzie przyjmować największą wartość w punkcie, w którym funkcja $f(r)=R^2r^2-r^4$, $r\in(0,R)$ będzie przyjmować największą wartość. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. $f'(r)=2R^2r-4r^3$, $r\in(0,R)$;

$f'(r)=0\Leftrightarrow r=\frac{R}{\sqrt{2}}$; $P\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\pi R$; $\lim\limits_{r\to 0^+}P(r)=\lim\limits_{r\to R^-}P(r)=0$. Największą powierzchnię boczną ma walec, w którym $r=\frac{R}{\sqrt{2}}$ i $h=\frac{2R}{\sqrt{2}}$ (czyli walec którego przekrój osiowy jest kwadratem). Pole powierzchni bocznej walca można uzależnić również od h. Otrzymujemy wówczas funkcję $P(h)=2\pi\sqrt{R^2h^2-\frac{h^4}{4}}$, $h\in(0,2R)$.

9.62. $1:9$ (9.5P, 11.6R)

Oznaczamy przez x długość tego fragmentu przekątnej górnej podstawy, który jest odcięty przez płaszczyznę przekroju (zobacz rysunek poniżej).



$P(x)$ – pole przekroju w zależności od x; $P(x)=\sqrt{(5\sqrt{2}-x)^2+4^2}\cdot(5\sqrt{2}+x)$, $x\in\langle 0,5\sqrt{2}\rangle$;

$P(x)=\sqrt{\left(x^2-10\sqrt{2}x+66\right)\left(x^2+10\sqrt{2}x+50\right)}$, $x\in\left\langle 0,5\sqrt{2}\right\rangle$. Przyjmujemy: $f(x)=\left(x^2-10\sqrt{2}x+66\right)\left(x^2+10\sqrt{2}x+50\right)$, $x\in\left\langle 0,5\sqrt{2}\right\rangle$ Funkcja $y=\sqrt{t}$ jest rosnąca, zatem funkcja $y=\sqrt{f(x)}$ będzie przyjmować największą wartość w punkcie, w którym funkcja $f(x)=\left(x^2-10\sqrt{2}x+66\right)\left(x^2+10\sqrt{2}x+50\right)$, $x\in\left\langle 0,5\sqrt{2}\right\rangle$, będzie przyjmować największą wartość. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. $f'(x)=\left(2x-10\sqrt{2}\right)\left(x^2+10\sqrt{2}x+50\right)+\left(x^2-10\sqrt{2}x+66\right)\left(2x+10\sqrt{2}\right)$, $x\in\left(0,5\sqrt{2}\right)$. A zatem $f'(x)=2\left(x-5\sqrt{2}\right)\left(x+5\sqrt{2}\right)^2+\left(x^2-10\sqrt{2}x+66\right)2\left(x+5\sqrt{2}\right)$, $f'(x)=2\left(x+5\sqrt{2}\right)\left(x^2-50+x^2-10\sqrt{2}x+66\right)$, czyli $f'(x)=4\left(x+5\sqrt{2}\right)\left(x^2-5\sqrt{2}x+8\right)$. Wówczas $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(x=\sqrt{2}\vee x=4\sqrt{2}\right)$. Obliczamy: $P(0)=10\sqrt{33}(\approx 57{,}4)$; $P\left(4\sqrt{2}\right)=54$; $P\left(\sqrt{2}\right)=24\sqrt{6}(\approx 58{,}8)$; $P\left(5\sqrt{2}\right)=40\sqrt{2}(\approx 56{,}6)$. Pole przekroju jest największe wtedy, gdy $x=\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}-\sqrt{2}=9\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}=\frac{1}{9}$. Płaszczyzna przekroju dzieli przekątną górnej podstawy w stosunku $1:9$.

10. Kombinatoryka. Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka

Zadania zamknięte

10.1. B (10.1R)

Chłopców można ustawić na 8 miejscach: pierwszym, trzecim, piątym, ..., piętnastym na $8!$ sposobów (zobacz (**10.3**)). Podobnie dziewczęta mogą stanąć na drugim, czwartym, szóstym, ..., czternastym miejscu na $7!$ sposobów. Z reguły (**10.2**) wynika, że mamy $8!\cdot 7!$ sposobów.

10.2. C (10.1R)

Ponieważ krzesełka są rozróżnialne i ustawione w koło, więc Ola i Adaś mogą je zająć na $8\cdot 2$, czyli na 16 sposobów. Pozostałe dzieci można posadzić na 6 różnych miejscach na $6!$ sposobów. Wszystkich możliwości mamy $6!\cdot 16$ (zobacz (**10.2**), (**10.3**)).

10.3. D (10.1R)

Liczba kolorów dla górnego pasa – 8, drugiego pasa – 7 kolorów, trzeciego pasa – 6 kolorów, czyli $8\cdot 7\cdot 6$, co jest równe $\frac{8!}{5!}$ (zobacz (**10.5**)).

10.4. C (10.1R)

<u>I sposób</u> – Korzystamy ze wzoru na liczbę kombinacji (**10.7**). Prostych jest tyle, ile dwuelementowych podzbiorów zbioru jedenastoelementowego, czyli $\binom{11}{2}=\frac{11\cdot 10}{2}=55$.

<u>II sposób</u> – Korzystamy ze wzoru na liczbę przekątnych wielokąta (**7.37**). Liczba prostych jest równa sumie liczby boków i liczby przekątnych jedenastokąta. Mamy: $11+\frac{11\cdot 8}{2}=55$.

10.5. A (10.1R)

<u>I sposób</u> – Korzystamy z kombinacji i reguły mnożenia. Wybieramy w 8-miejscowym szeregu miejsca na poszczególne litery. W wyrazie PRABABKA mamy 3 litery A, 2 litery B i po jednej literze P, R, K. Trzy miejsca dla liter A można wybrać na $\binom{8}{3}$ sposobów (**10.7**); z pozostałych 5 miejsc wybieramy 2 na literę B – na $\binom{5}{2}$ sposobów; następnie litery P, R, K można kolejno ustawić na $\binom{3}{1}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{1}{1}$ sposobów. Z reguły mnożenia (**10.2**) otrzymujemy $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}$, czyli 3360 sposobów.

<u>II sposób</u> – Korzystamy z własności permutacji i reguły mnożenia. Niech x oznacza szukaną liczbę różnych wyrazów. Jeśli zaczniemy odróżniać litery A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2 to z reguły mnożenia iloczyn $x\cdot 3!\cdot 2!$ będzie oznaczać liczbę wszystkich przestawień 8 różnych liter, czyli liczbę równą $8!$. Zatem $x\cdot 3!\cdot 2!=8!$, skąd $x=\frac{8!}{3!\cdot 2!}=3360$ (zobacz (**10.2**), (**10.3**)).