

Odpowiedzi

Ciągi

Praca klasowa nr 1, grupa A

1.	Zapisanie wzoru ciągu w postaci $a_n = \frac{5n+2}{3n+2}$	2 pkt	5 pkt
	Obliczenie $a_{n+1} = \frac{5n+7}{3n+5}$ i obliczenie różnicy $a_{n+1} - a_n = \frac{4}{(3n+2)(3n+5)}$	2 pkt	
	Określenie znaku różnicy i stwierdzenie, że ciąg (a_n) jest rosnący	1 pkt	
2.	Oznaczenia danych a, b, c – długości boków trójkąta ($a > 0, b > 0, c > 0$), (a, b, c) – ciąg arytmetyczny, $R = 2$ (promień okręgu wpisanego w trójkąt) i zapisanie warunku $b = \frac{a+c}{2}$	1 pkt	5 pkt
	Ułożenie układu równań $\begin{cases} b = \frac{a+c}{2} \\ 2 = \frac{a+b-c}{2} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$	2 pkt	
	Wyznaczenie rozwiązania spełniającego warunki zadania $\begin{cases} a=6 \\ b=8 \\ c=10 \end{cases}$	2 pkt	
3.	a) Wykorzystanie wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego i zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi $\begin{cases} a_1 q^4 - a_1 = 30 \\ a_1 q^3 - a_1 q = 12 \end{cases}; \text{ rozwiązanie układu } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = -32 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$	3 pkt	5 pkt
	b) wyznaczenie sum $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \\ S_7 = 254 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = -32 \\ q = \frac{1}{2} \\ S_7 = -\frac{127}{2} \end{cases}$	2 pkt	
4.	Obliczenie $a_{10} = 362$	1 pkt	5 pkt
	Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego $r = 40$	1 pkt	
	Obliczenie $a_5 = 162 = b_5$	1 pkt	
	Wyznaczenie ilorazu ciągu geometrycznego spełniającego warunki zadania $q = 3$	1 pkt	
	Wyznaczenie $a_6 = 486$	1 pkt	

Praca klasowa nr 1, grupa B

1.	Zapisanie wzoru ciągu w postaci $a_n = \frac{7n+3}{3n+5}$	2 pkt	5 pkt
	Obliczenie $a_{n+1} = \frac{7n+10}{3n+8}$ i obliczenie różnicy $a_{n+1} - a_n = \frac{26}{(3n+8)(3n+5)}$	2 pkt	
	Określenie znaku różnicy i stwierdzenie, że ciąg (a_n) jest rosnący.	1 pkt	
2.	Oznaczenia danych $a, a+3, a+6$ – długości boków trójkąta ($a > 0$); ułożenie i rozwiązanie równania $a^2 + (a+3)^2 = (a+6)^2 \Leftrightarrow (a=9 \vee a=-3) \wedge a > 0 \Leftrightarrow a=9$	2 pkt	5 pkt
	Wyznaczenie długości pozostałych boków trójkąta $b=12, c=15$	1 pkt	
	Wyznaczenie długości promienia $R=3$	2 pkt	
3.	a) Wykorzystanie wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego i zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi $\begin{cases} a_1 q^4 - a_1 = 240 \\ a_1 q^3 + a_1 q = 90 \end{cases}; \text{ rozwiązanie układu } \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = -243 \\ q = -\frac{1}{3} \end{cases}$	3 pkt	5 pkt
	b) wyznaczenie sum $\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 3 \\ S_6 = 1092 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = -243 \\ q = -\frac{1}{3} \\ S_6 = -364 \end{cases}$	2 pkt	
4.	Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego spełniającego warunki zadania: $q=2$	2 pkt	5 pkt
	Obliczenie wyrazów $b_4 = 24$ i $b_8 = 384$	1 pkt	
	Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego $r=90$	1 pkt	
	Wyznaczenie $a_{10} = 564$	1 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa A

1.	Zapisanie pierwiastków wielomianu jako: $x_1, x_2 = x_1 + r, x_3 = x_1 + 2r$ (r – różnica ciągu arytmetycznego) oraz zapisanie warunku $x_1 + r = 4 = x_2$	1 pkt	5 pkt
	Zapisanie $x_1 = 4 - r$ i $x_3 = 4 + r$, ułożenie równania $4(4 - r) + (4 - r)(4 + r) + 4(4 + r) = 44$	1 pkt	
	Obliczenie $r = 2$ lub $r = -2$ oraz podanie pierwiastków: 2, 4, 6	1 pkt	
	Obliczenie wartości parametrów $p = -12$ i $q = -48$	2 pkt	
2.	Zapisanie równania $x^2 - y = 2x - y + 3$ i obliczenie niewiadomej x : $x = 3$ lub $x = -1$	2 pkt	5 pkt
	Obliczenie dla $x = 3$ z równania $9 - y = 3 + y^2$ niewiadomej y : $y \in \{-3, 2\}$	1 pkt	
	Obliczenie dla $x = -1$ z równania $1 - y = -1 + y^2$ niewiadomej y : $y \in \{-2, 1\}$	1 pkt	
	Zapisanie rozwiązania $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$	1 pkt	
3.	Oznaczenie ilorazu ciągu (a_n) przez q i zauważenie, że ciąg wyrazów stojących na miejscach parzystych jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q^2	1 pkt	5 pkt
	Oznaczenie liczby wyrazów ciągu (a_n) przez $2k$ i zauważenie, że liczba wyrazów stojących na miejscach parzystych jest równa k	1 pkt	
	Ułożenie i rozwiązanie równania $a_1 \cdot \frac{1 - q^{2k}}{1 - q} = 4 \cdot a_1 q \cdot \frac{1 - q^{2k}}{1 - q^2} \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$	3 pkt	
4.	a) Zapisanie ciągu w postaci $a_n = 9 - \frac{18}{n+1}$, analiza mianownika ułamka i zapisanie odpowiedzi: naturalne dodatnie wyrazy ciągu to: a_2, a_5, a_8, a_{17}	3 pkt	5 pkt
	b) obliczenie wyrazu $a_{n+1} = 9 - \frac{18}{n+2}$ i wykazanie, że $a_{n+1} - a_n = \frac{18}{(n+2)(n+1)} > 0$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, i stwierdzenie, że (a_n) jest ciągiem rosnącym	2 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa B

1.	Zapisanie pierwiastków wielomianu jako: $x_1, x_2 = x_1 + r, x_3 = x_1 + 2r$ (r – różnica ciągu arytmetycznego) oraz zapisanie warunku $x_1 + r = 3 = x_2$	1 pkt	5 pkt
	Zapisanie $x_1 = 3 - r$ i $x_3 = 3 + r$, ułożenie równania $3(3 - r) + (3 - r)(3 + r) + 3(3 + r) = 23$	1 pkt	
	Obliczenie $r = 2$ lub $r = -2$ oraz podanie pierwiastków: 1, 3, 5	1 pkt	
	Obliczenie wartości parametrów $p = -9$ i $q = -15$	2 pkt	
2.	Zapisanie równania $y^2 - x = x - 2y - 3$ i obliczenie niewiadomej y : $y = 3$ lub $y = -1$	2 pkt	5 pkt
	Obliczenie dla $y = 3$ z równania $x - 9 = -3 - x^2$ niewiadomej x : $x \in \{-3, 2\}$	1 pkt	
	Obliczenie dla $y = -1$ z równania $-1 + x = 1 - x^2$ niewiadomej x : $x \in \{-2, 1\}$	1 pkt	
	Zapisanie rozwiązania $\begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$	1 pkt	
3.	Oznaczenie ilorazu ciągu (a_n) przez q i zauważenie, że ciąg wyrazów stojących na miejscach nieparzystych jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q^2	1 pkt	5 pkt
	Oznaczenie liczby wyrazów ciągu (a_n) przez $2k$ i zauważenie, że liczba wyrazów stojących na miejscach nieparzystych jest równa k	1 pkt	
	Ułożenie i rozwiązanie równania $a_1 \cdot \frac{1 - q^{2k}}{1 - q} = 6 \cdot a_1 \cdot \frac{1 - q^{2k}}{1 - q^2} \Leftrightarrow q = 5$	3 pkt	
4.	a) Zapisanie ciągu w postaci $a_n = 6 - \frac{12}{n+1}$, analiza mianownika ułamka i zapisanie odpowiedzi: naturalne dodatnie wyrazy ciągu to: a_2, a_3, a_5, a_{11}	3 pkt	5 pkt
	b) obliczenie wyrazu $a_{n+1} = 6 - \frac{12}{n+2}$ i wykazanie, że $a_{n+1} - a_n = \frac{12}{(n+2)(n+1)} > 0$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$ i stwierdzenie, że (a_n) jest ciągiem rosnącym	2 pkt	

Praca klasowa nr 3, grupa A

1.	Zapisanie nierówności: $\left \frac{2n-1}{n} - 2 \right < \varepsilon$	1 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności: $n > \frac{1}{\varepsilon}$	1 pkt	
	Zapisanie wniosku, że prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n , począwszy od $a_{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}$, należą do otoczenia liczby 2 o promieniu ε	1 pkt	
	Zapisanie i rozwiązanie nierówności: $n > \frac{1}{0,004} \Leftrightarrow n > 250$; zapisanie odpowiedzi, że wszystkie wyrazy, począwszy od a_{251} , są oddalone od liczby 2 o mniej niż 0,004	2 pkt	
2.	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{4}$	2 pkt	6 pkt
	b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{1}{5}$	2 pkt	
	c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$	2 pkt	
3.	Przyjęcie oznaczeń: a_1 – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie q spełniającym warunek $ q < 1 \Leftrightarrow q \in (-1, 1)$; zapisanie układu równań $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q^2} = 16 \\ \frac{a_1 q}{1-q^2} = 4 \end{cases}$	3 pkt	6 pkt
	Wyznaczenie rozwiązania $\begin{cases} a_1 = 15 \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$; obliczenie $S_5 = \frac{5115}{256}$	3 pkt	
4.	a) Obliczenie $a_{n+1} = \left(\frac{2+p}{4-p} \right)^{n+3}$ oraz ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+p}{4-p} = \text{const}$ oraz zapisanie wniosku	3 pkt	6 pkt
	b) Wyznaczenie $q = \frac{2+p}{4-p}$, zapisanie warunku i rozwiązanie warunku $\left \frac{2+p}{4-p} \right < 1 \wedge (p \neq 4) \Leftrightarrow q \in (-\infty, 1)$	3 pkt	

5.	a) $D_f = (-\infty, \frac{3}{2}), f(x) = -x + 1$	2 pkt	6 pkt
	b) wykres z uwzględnieniem dziedziny	2 pkt	
	c) $x \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$	2 pkt	

Praca klasowa nr 3, grupa B

1.	Zapisanie nierówności: $\left \frac{3n-2}{n} - 3 \right < \varepsilon$	1 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności: $n > \frac{2}{\varepsilon}$	1 pkt	
	Zapisanie wniosku, że prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n , począwszy od $a_{\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1}$, należą do otoczenia liczby 3 o promieniu ε	1 pkt	
	Zapisanie i rozwiązanie nierówności $n > \frac{2}{0,002} \Leftrightarrow n > 1000$; zapisanie odpowiedzi, że wszystkie wyrazy, począwszy od a_{1001} , są oddalone od liczby 3 o mniej niż 0,002	2 pkt	
2.	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{5}{2}$	2 pkt	6 pkt
	b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 20$	2 pkt	
	c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$	2 pkt	
3.	Przyjęcie oznaczeń: a_1 – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie q spełniającym warunek $ q < 1 \Leftrightarrow q \in (-1, 1)$; zapisanie układu równań $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q^2} = 125 \\ \frac{a_1 q}{1-q^2} = 5 \end{cases}$	3 pkt	6 pkt
	Wyznaczenie rozwiązania $\begin{cases} a_1 = 24 \\ q = \frac{1}{5} \end{cases}$; obliczenie $S_4 = \frac{3744}{125}$	3 pkt	
4.	a) Obliczenie $a_{n+1} = \left(\frac{p+1}{3-p}\right)^{n+4}$ oraz ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p+1}{3-p} = \text{const}$; zapisanie wniosku	3 pkt	6 pkt
	b) wyznaczenie $q = \frac{p+1}{3-p}$, zapisanie warunku i rozwiązanie warunku $\left \frac{p+1}{3-p} \right < 1 \Leftrightarrow q \in (-\infty, 1)$	3 pkt	

5.	a) $D_f = (-\infty, \frac{7}{2}), f(x) = -x + 3$	2 pkt	6 pkt
	b) wykres z uwzględnieniem dziedziny	2 pkt	
	c) $x \in \{-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$	2 pkt	

Praca klasowa nr 4, grupa A

1.	a) Podanie odpowiedzi $p = \frac{7}{4}$ i uzasadnienie	2 pkt	6 pkt
	b) podanie odpowiedzi $p = 2$ i uzasadnienie	2 pkt	
	c) podanie odpowiedzi $p = 0$ lub $p = \frac{7}{3}$ i uzasadnienie	2 pkt	
2.	Zapisanie układu równań $\begin{cases} 1+r=q \\ 1+2r=q^2-9 \end{cases}$, gdzie r – różnica ciągu arytmetycznego ($r > 0$), q – iloraz ciągu geometrycznego ($q > 0$)	1 pkt	6 pkt
	Wyznaczenie rozwiązania spełniającego warunki zadania $\begin{cases} r=3 \\ q=4 \end{cases}$; zapisanie wzorów ogólnych ciągów $a_n = 3n - 2$, $b_n = \frac{1}{4} \cdot 4^n$	3 pkt	
	Obliczenie granic $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+2} = 3$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot b_n}{b_n + 1} = 3$	2 pkt	
3.	Wyznaczenie wzoru funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$	2 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności $ f(x) < 1$ i wyznaczenie dziedziny funkcji $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$	3 pkt	
	Narysowanie wykresu funkcji w zadanej dziedzinie	1 pkt	
4.	Określenie ilorazu $q = x^2 + 2x$ i rozwiązanie warunku $ q < 1 \Leftrightarrow x \in (-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$ i zapisanie dziedziny nierówności $D_N = (-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$	2 pkt	6 pkt
	Wykorzystanie wzoru na sumę szeregu i zapisanie nierówności w postaci $\frac{1}{1-x^2-2x} \geq 1 \wedge x \in D_N$	1 pkt	
	Rozwiązanie nierówności (2 pkt) i podanie odpowiedzi $x \in (-1 - \sqrt{2}, -2) \cup (0, -1 + \sqrt{2})$ (1 pkt)	3 pkt	
5.	Zapisanie kolejnych promieni jako wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego $r_1, \frac{1}{2}r_1, \frac{1}{4}r_1, \dots$ z uzasadnieniem	2 pkt	6 pkt
	Zapisanie ciągu pól $\pi(r_1)^2, \frac{1}{4}\pi(r_1)^2, \frac{1}{16}\pi(r_1)^2, \dots$	1 pkt	

Zapisanie $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	1 pkt
Obliczenie sumy pól $S = \frac{\pi a^2}{9}$	2 pkt

Praca klasowa nr 4, grupa B

1.	a) Podanie odpowiedzi $p = -\frac{8}{3}$ i uzasadnienie	2 pkt	6 pkt
	b) podanie odpowiedzi $p = -3$ i uzasadnienie	2 pkt	
	c) podanie odpowiedzi $p = 0$ lub $p = -\frac{7}{2}$ i uzasadnienie	2 pkt	
2.	Zapisanie układu równań $\begin{cases} 1+r=q \\ 1+2r=q^2-16 \end{cases}$, gdzie r – różnica ciągu arytmetycznego ($r > 0$), q – iloraz ciągu geometrycznego ($q > 0$)	1 pkt	6 pkt
	Wyznaczenie rozwiązania spełniającego warunki zadania $\begin{cases} r=4 \\ q=5 \end{cases}$; zapisanie wzorów ogólnych ciągów $a_n = 4n - 3$, $b_n = \frac{1}{5} \cdot 5^n$	3 pkt	
	Obliczenie granic $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n+1} = 2$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot b_n}{b_n - 1} = 2$	2 pkt	
3.	Wyznaczenie wzoru funkcji $f(x) = \frac{-3}{x}$	2 pkt	6 pkt
	Rozwiązanie nierówności $ f(x) < 1$ i wyznaczenie dziedziny funkcji $D_f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$	3 pkt	
	Narysowanie wykresu funkcji w zadanej dziedzinie	1 pkt	
4.	Określenie ilorazu $q = x^2 - 2x$ i rozwiązanie warunku $ q < 1 \Leftrightarrow x \in (1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$ i zapisanie dziedziny nierówności $D_N = (1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$	2 pkt	6 pkt
	Wykorzystanie wzoru na sumę szeregu i zapisanie nierówności w postaci $\frac{1}{1-x^2+2x} \leq 1 \wedge x \in D_N$	1 pkt	
	Rozwiązanie nierówności (2 pkt) i podanie odpowiedzi $x \in \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$ (1 pkt)	3 pkt	
5.	Zapisanie kolejnych długości boków trójkątów jako wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego $a_1, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{4}a_1, \dots$ z uzasadnieniem	2 pkt	6 pkt
	Zapisanie ciągu pól $\frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4}, \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{16}, \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{64}, \dots$	1 pkt	

Zapisanie $a_1 = r\sqrt{3}$	1 pkt
Obliczenie sumy pól $S = \sqrt{3} r^2$	2 pkt