

# 8. Ciągi

PRZECZYTAJ WIĘCEJ



Ciągi

zob. Vademecum, s. 135-142

## Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

↑ odpowiedzi  
- s. 183

- Które wyrazy ciągu  $(a_n)$  są ujemne, a które są większe od 3?  
a)  $a_n = n^3 - 5n^2 - 5n + 25$       b)  $a_n = \frac{6n-16}{2n-7}$       c)  $a_n = 4 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$
- Oblicz sumę wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , jeśli:  
a)  $a_n = 2n - 18$ , a suma trzech końcowych wyrazów ciągu jest równa 60,  
b)  $a_n = 3n - 5$  oraz ciąg ma nieparzystą liczbę wyrazów, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 78.
- Suma dwudziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  jest równa trzynastemu wyrazowi tego ciągu. Oblicz stosunek wartości pierwszego wyrazu do różnicy ciągu oraz trzynasty wyraz tego ciągu.
- a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 7, a jego różnica wynosi 2. Suma  $n$  początkowych wyrazów tego ciągu jest dwa razy mniejsza od sumy kolejnych  $n$  wyrazów. Oblicz  $n$ .  
b) Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  jest trzy razy mniejsza od sumy kolejnych sześciu wyrazów tego ciągu. Oblicz pierwszy wyraz ciągu, jeżeli  $a_2 \cdot a_3 = 15$ .
- Suma  $n$  ( $n > 1$ ) początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa wyrazowi  $a_n$ . Stosunek różnicy tego ciągu do pierwszego wyrazu wynosi  $-\frac{1}{4}$ . Oblicz  $n$  oraz piąty wyraz ciągu.
- Wykaż, że jeżeli suma pięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych ciągu arytmetycznego jest równa 110, to szósty wyraz ciągu wynosi 22. Oblicz różnicę tego ciągu, jeżeli suma pierwszych dziesięciu jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 420.
- Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ . Dzieląc wyraz dziesiąty przez wyraz siódmy, otrzymujemy 3 i resztę 1. Oblicz iloczyn dziesięciu początkowych wyrazów ciągu  $b_n = (0,125)^{a_n}$ .
- $S_n$  jest sumą  $n$  początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Czy jest to ciąg arytmetyczny?  
a)  $S_n = n^2 - 5n$       b)  $S_n = n^2 - 5n + 1$       c)  $S_n = n^3 + 1$
- Ciąg  $(a_n)$  jest arytmetyczny. Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz tego ciągu, jeżeli suma  $m$  początkowych jego wyrazów o numerach:  
a) parzystych jest równa  $6m^2 - 4m$ ,      b) nieparzystych jest równa  $3m^2 + m$ .



## Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi  
– s. 183  
modele  
– s. 184

**Zadanie 1.** (6 pkt)

Dany jest ciąg  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n - 1)$ .

- Uzasadnij, że  $(a_n)$  nie jest ciągiem arytmetycznym.
- Oblicz sumę stu jeden początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 2.** (5 pkt)

Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa  $-\frac{7}{4}n + \frac{1}{4}n^2$  dla  $n \geq 1$ . Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.

**Zadanie 3.** (5 pkt)

Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$  liczby  $\log_2 x$ ,  $\log_m x$ ,  $\log_4 x$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz  $m$ .

**Zadanie 4.** (4 pkt)

Rozwiąż równanie  $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{2x-1} = 64 \cdot 4^{x+1}$ .

**Zadanie 5.** (5 pkt)

Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego  $(a_n)$  jest równa 4, a suma dziesięciu początkowych jego wyrazów wynosi 132. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

**Zadanie 6.** (5 pkt)

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego  $(a_n)$  jest równy 2. Ciąg  $(b_n)$  dany jest wzorem  $b_n = \log_2 a_n$ . Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu  $(b_n)$  wynosi  $-35$ . Oblicz iloraz  $q$  ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 7.** (6 pkt)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny  $(a_n)$ .

- Uzasadnij, że ciąg  $b_n = \frac{1}{a_n}$  także jest ciągiem geometrycznym.
- Wiedząc, że suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest równa 124, a suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu  $(b_n)$  wynosi 31, oblicz iloczyn dwudziestu początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

**Zadanie 8.** (4 pkt)

Dany jest ciąg  $(a_n)$ , dla którego  $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 105$ . Ciąg  $(b_n)$  dany wzorem  $b_n = 2^{a_n}$  jest geometryczny. Oblicz ósmy wyraz ciągu  $(b_n)$ .

**Zadanie 9.** (3 pkt) CKE 2015

Niech  $P_n$  oznacza pole koła o promieniu  $\frac{1}{2^n}$ , dla  $n \geq 1$ . Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu  $(P_n)$ .

**Zadanie 10.** (4 pkt)

Pierwszy, czwarty i dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy  $r \neq 0$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

**Zadanie 11.** (4 pkt)

Liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  tworzą rosnący ciąg geometryczny. Liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c - 3$  tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , jeżeli wiadomo, że  $a \cdot c = 324$ .

**Zadanie 12.** (5 pkt) CKE

O liczbach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  wiemy, że ciąg  $(a, b, c)$  jest arytmetyczny i  $a + c = 10$ , zaś ciąg  $(a + 1, b + 4, c + 19)$  jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

**Zadanie 13.** (4 pkt)

Dana jest funkcja  $f(x) = -2x + 4$ . Uzasadnij, że jeśli  $(x_n)$  jest ciągiem arytmetycznym, to  $y_n = f(x_n)$  także nim jest.

**Zadanie 14.** (3 pkt)

Wykaż, że jeśli liczby  $a - b$ ,  $ab$  i  $c - a$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to liczby  $2a^2$ ,  $c - b$  i  $2b^2$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

**Zadanie 15.** (5 pkt)

Suma sześciu początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego  $(a_n)$  jest 72 razy większa od sumy trzech następnych jego wyrazów. Wyznacz wzór ogólny ciągu, jeżeli iloczyn wyrazów drugiego i czwartego jest równy 4.

**Zadanie 16.** (6 pkt)

Ciąg  $(a_n)$  jest dany wzorem rekurencyjnym  $a_1 = -1$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}$  dla  $n \geq 1$ . Dziewiąty i dwudziesty piąty wyraz tego ciągu są pierwiastkami wielomianu  $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ . Wyznacz argumenty, dla których wielomian  $w$  przyjmuje wartości nieujemne.

**Zadanie 17.** (5 pkt)

Rozwiąż nierówność, jeżeli jej lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\frac{2x}{3x-1} + \frac{6x}{3x-1} + \dots + \frac{98x}{3x-1} \geq 625$$

**Zadanie 18.** (5 pkt)

Liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  i  $f$  tworzą ciąg geometryczny.

- Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $w(x) = ax^5 - bx^4 - 2cx^3 + 2dx^2 + ex - f$  dla  $a \neq 0$ .
- Rozwiąż nierówność  $w(x) \geq 0$  dla  $a = -1$  i ilorazu 2.

**Zadanie 19.** (4 pkt)

Rozwiąż równanie  $||x - a| - b| = 2$ , gdzie  $a$  jest czwartym, a  $b$  - piątym wyrazem ciągu określonego rekurencyjnie  $a_1 = -5$ ,  $a_n = a_{n-1} + 2$ .