Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów

Musimy znać wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.

Wzory

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

Wzory

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Proste konsekwencje tych wzorów:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Wzory

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Proste konsekwencje tych wzorów:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Jeśli te konsekwencje nie są dla Was jednak proste, to proszę mi o tym powiedzieć na lekcji - wyjaśnimy.

Wzory

Udowodnimy jeden ze wspomnianych wzorów. Pozostałe można będzie już łatwo wyprowadzić przez odpowiednie podstawienia.

Wzory

Udowodnimy jeden ze wspomnianych wzorów. Pozostałe można będzie już łatwo wyprowadzić przez odpowiednie podstawienia. Udowodnimy:

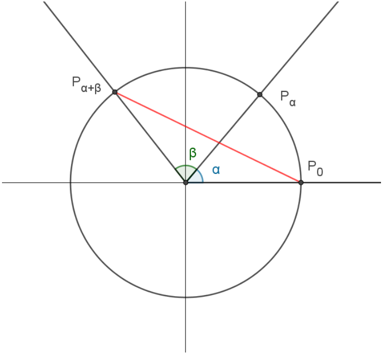
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Dowód

Oznaczmy na okręgu jednostkowym kąt $\alpha + \beta$.

Dowód

Oznaczmy na okręgu jednostkowym kąt $\alpha + \beta$.



Wtedy $\cos(\alpha + \beta)$ to współrzędna x punktu $P_{\alpha+\beta}$. Obliczymy długość odcinka $P_0 P_{\alpha+\beta}$.

Dowód

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|P_0 P_{\alpha+\beta}|^2 = (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$$

Dowód

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|P_0P_{\alpha+\beta}|^2 = (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + \sin^2(\alpha+\beta)$$

Otrzymujemy:

Dowód

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

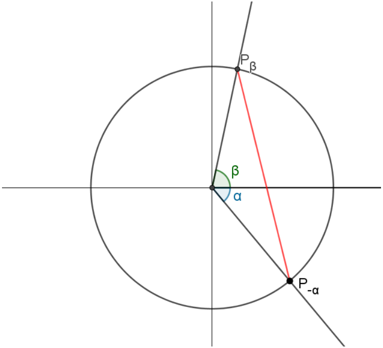
$$|P_0 P_{\alpha+\beta}|^2 = (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$$

Otrzymujemy:

$$|P_0 P_{\alpha+\beta}|^2 = 1 - 2\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos(\alpha + \beta)$$

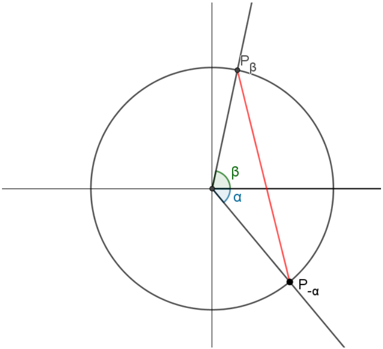
Dowód

Obróćmy teraz nieco nasz trójkąt:



Dowód

Obróćmy teraz nieco nasz trójkąt:



Oczywiście trójkąt się nie zmienił, więc czerwony odcinek ma tę samą długość, czyli

$$|P_0P_{\alpha+\beta}| = |P_{-\alpha}P_\beta|$$

Dowód

Obliczmy $|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2$.

Dowód

Obliczmy $|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2$.

$$|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2 = (\cos\beta - \cos(-\alpha))^2 + (\sin(-\alpha) - \sin\beta)^2$$

Dowód

Obliczmy $|P_{-\alpha}P_\beta|^2$.

$$|P_{-\alpha}P_\beta|^2 = (\cos\beta - \cos(-\alpha))^2 + (\sin(-\alpha) - \sin\beta)^2$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|P_{-\alpha}P_\beta|^2 =& \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \\ &+ \sin^2(-\alpha) - 2\sin(-\alpha)\sin\beta) + \sin^2\beta = \\ =& 2 - 2\cos\beta\cos\alpha + 2\sin\beta\sin\alpha\end{aligned}$$

Dowód

Otrzymaliśmy ostatecznie:

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos\beta\cos\alpha + 2\sin\beta\sin\alpha$$

Dowód

Otrzymaliśmy ostatecznie:

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\beta\cos\alpha + 2\sin\beta\sin\alpha$$

Czyli:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

Podsumowanie

W kilku miejscach tego dowodu zastosowane zostały dosyć szybkie przejścia. Ambitniejsze osoby proszę, by spróbowały dokładnie zrozumieć ten dowód, a w razie wątpliwości wyjaśnimy je na zajęciach.

Zastosowanie

Obliczmy $\sin 105^\circ$.

Zastosowanie

Obliczmy $\sin 105^\circ$.

$$\begin{aligned}\sin(105^\circ) = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Zastosowanie

Obliczmy $\cos\frac{\pi}{12}$.

Zastosowanie

Obliczmy $\cos\frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Zastosowanie

Obliczmy $\cos \frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Wynik ten był do przewidzenia, gdyż:

$$\sin 105^\circ = \sin \frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{12}$$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.