Równania trygonometryczne

Prezentacja dotyczy rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Prezentacja dotyczy rozwiązywania równań trygonometrycznych. Na maturze co roku jest jedno zadanie z równań/nierówności trygonometrycznych, które jest warte 4 punkty, czyli 8% Waszego wyniku.

Prezentacja dotyczy rozwiązywania równań trygonometrycznych. Na maturze co roku jest jedno zadanie z równań/nierówności trygonometrycznych, które jest warte 4 punkty, czyli 8% Waszego wyniku. To jest całkiem sporo, więc warto dobrze opanować ten materiał, a jest on dosyć prosty.

Plan

Przerobimy następujące tematy:

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,
- rozkładanie na czynniki,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,
- rozkładanie na czynniki,
- wykorzystanie jedynki trygonometrycznej,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,
- rozkładanie na czynniki,
- wykorzystanie jedynki trygonometrycznej,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus podwojonego kąta,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,
- rozkładanie na czynniki,
- wykorzystanie jedynki trygonometrycznej,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus podwojonego kąta,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus sumy/różnicy kątów,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,
- rozkładanie na czynniki,
- wykorzystanie jedynki trygonometrycznej,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus podwojonego kąta,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus sumy/różnicy kątów,
- zastosowanie wzorów na sumę/różnicę sinusów i cosinusów,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,
- rozkładanie na czynniki,
- wykorzystanie jedynki trygonometrycznej,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus podwojonego kąta,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus sumy/różnicy kątów,
- zastosowanie wzorów na sumę/różnicę sinusów i cosinusów,
- trudniejsze przykłady równań,

Plan

Przerobimy następujące tematy:

- podstawowe równania trygonometryczne,
- przekształcenia podstawowych równań,
- rozkładanie na czynniki,
- wykorzystanie jedynki trygonometrycznej,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus podwojonego kąta,
- zastosowanie wzorów na sinus i cosinus sumy/różnicy kątów,
- zastosowanie wzorów na sumę/różnicę sinusów i cosinusów,
- trudniejsze przykłady równań,
- zadania maturalne.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1

Zacznijmy od następującego równania:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

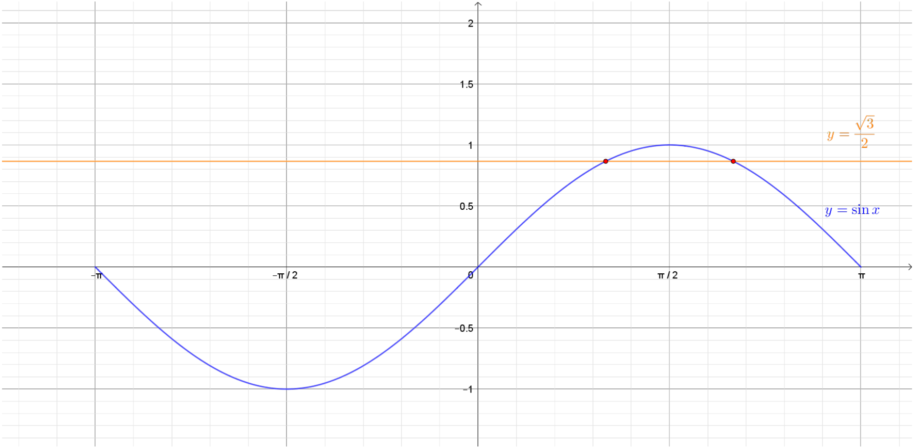
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1

Zacznijmy od następującego równania:

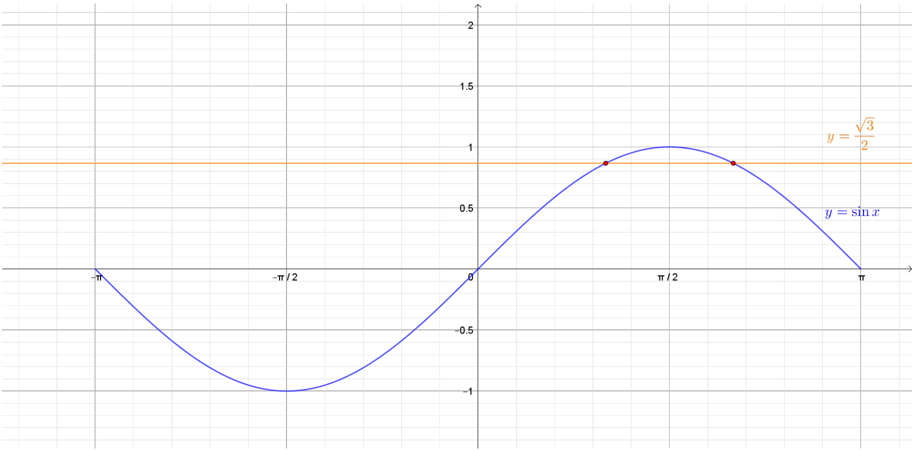
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Najpierw rysujemy jeden okres wykresu funkcji sinus (np. od $-\pi$ do π) oraz prostą $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1

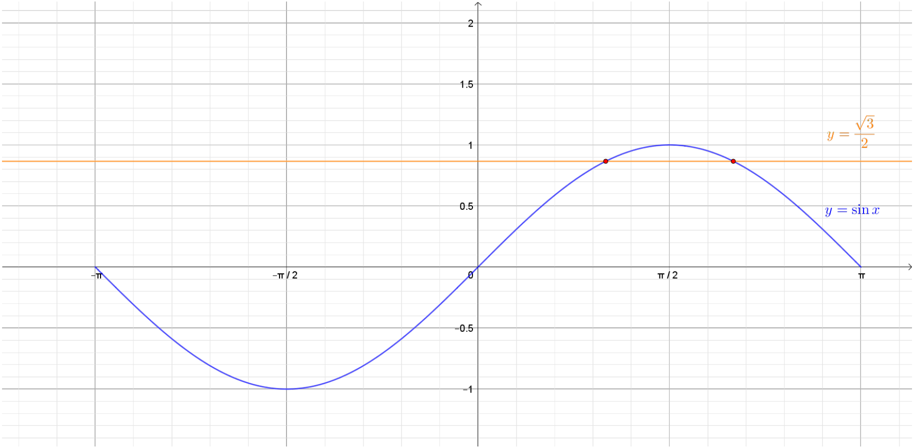


Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1



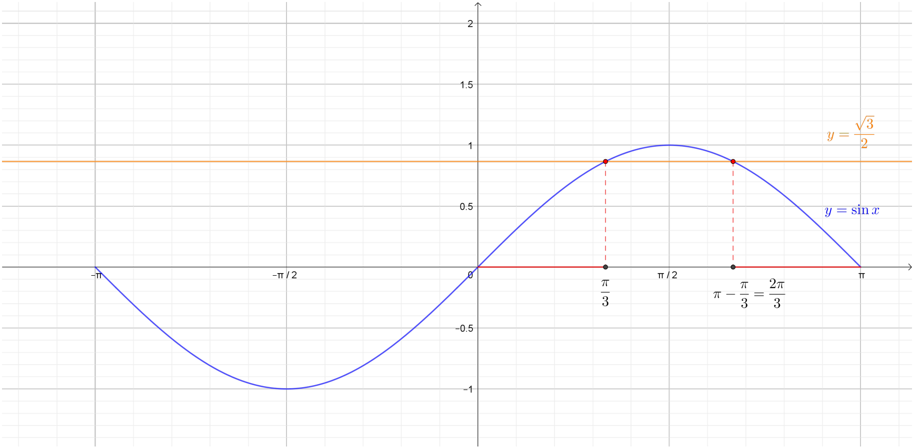
Na wykresie widzimy dwa rozwiązania (czerwone punkty).

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1



Na wykresie widzimy dwa rozwiązania (czerwone punkty). Jedno z tych rozwiązań musimy znać z tabelki, drugie odczytujemy korzystając z symetrii wykresu.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1



Nasze rozwiązania to $x = \frac{\pi}{3}$ i $x = \frac{2\pi}{3}$

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1

Ostatecznie otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

są:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1

Ostatecznie otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

są:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, czyli k jest liczbą całkowitą.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1

Ostatecznie otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

są:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, czyli k jest liczbą całkowitą.

Skąd to $2k\pi$?

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 1

Ostatecznie otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

są:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, czyli k jest liczbą całkowitą.

Skąd to $2k\pi$? Narysowaliśmy przecież tylko jeden okres *sinusa*, wszystkie wartości powtarzają się co 2π, a więc dodanie/odjęcie jakiejkolwiek wielokrotności 2π do argumentu, nie zmieni wartości *sinusa*.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2

Równanie do rozwiązania:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

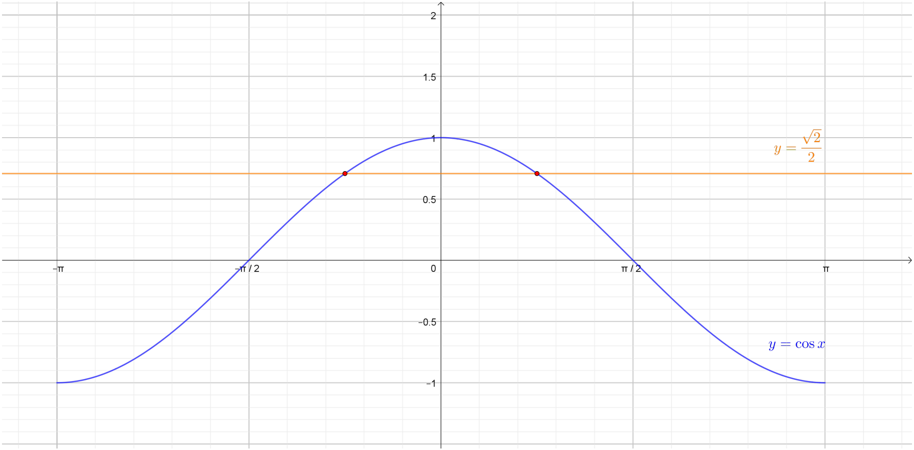
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2

Równanie do rozwiązania:

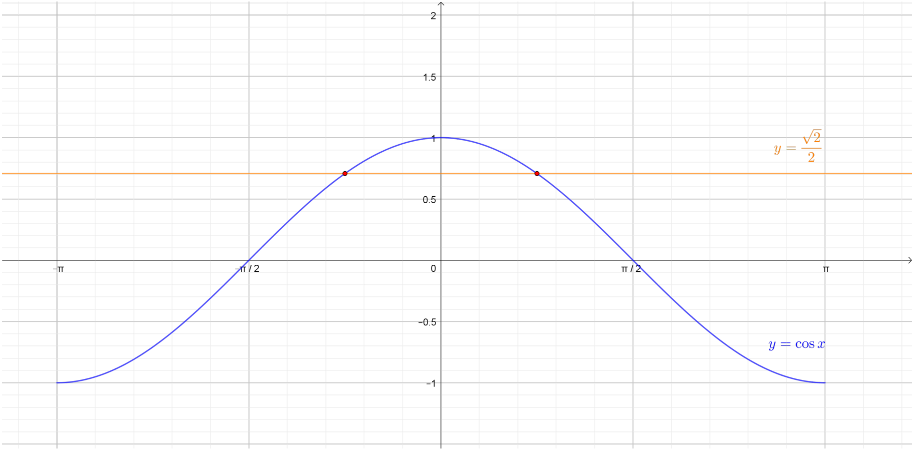
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rysujemy jeden okres wykresu funkcji cosinus (znów może to być od $-\pi$ do π) oraz prostą $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2

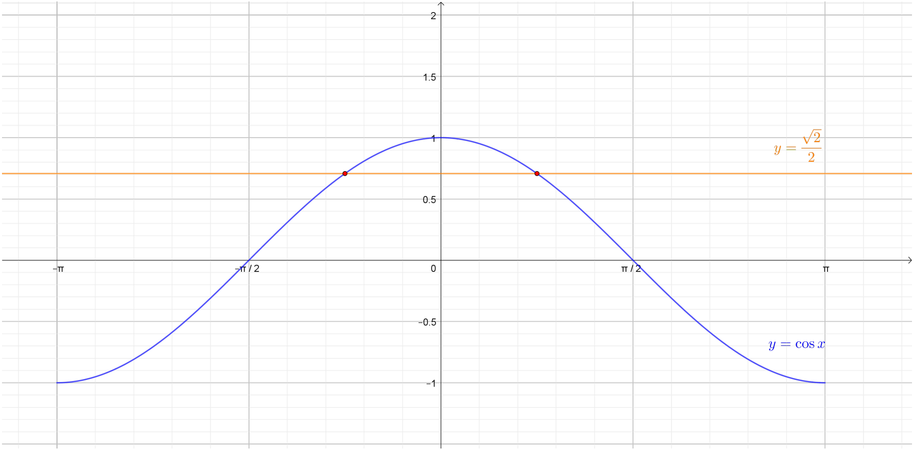


Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2



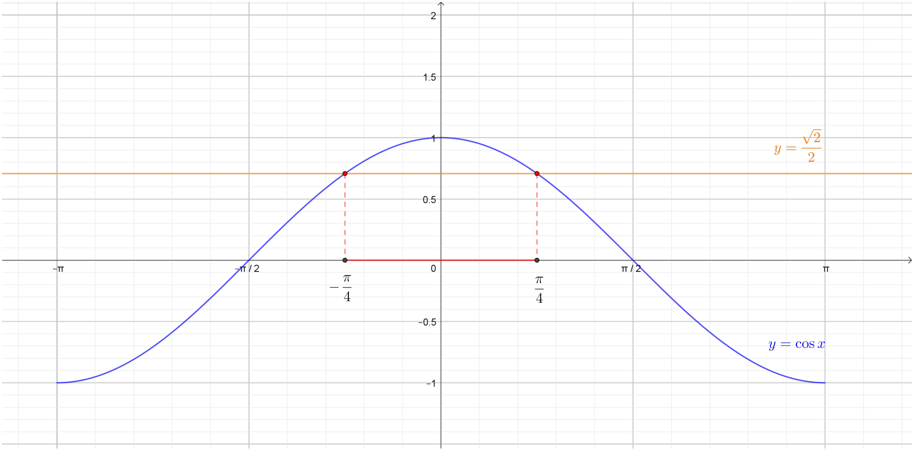
Widzimy dwa rozwiązania (czerwone punkty).

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2



Widzimy dwa rozwiązania (czerwone punkty). Jedno z tych rozwiązań znamy z tabelki, drugie odczytujemy korzystając z symetrii wykresu.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2



Jedno rozwiązanie to $x = \frac{\pi}{4}$, drugie to oczywiście $x = -\frac{\pi}{4}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

są:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 2

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

są:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 3

Równanie do rozwiązania:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

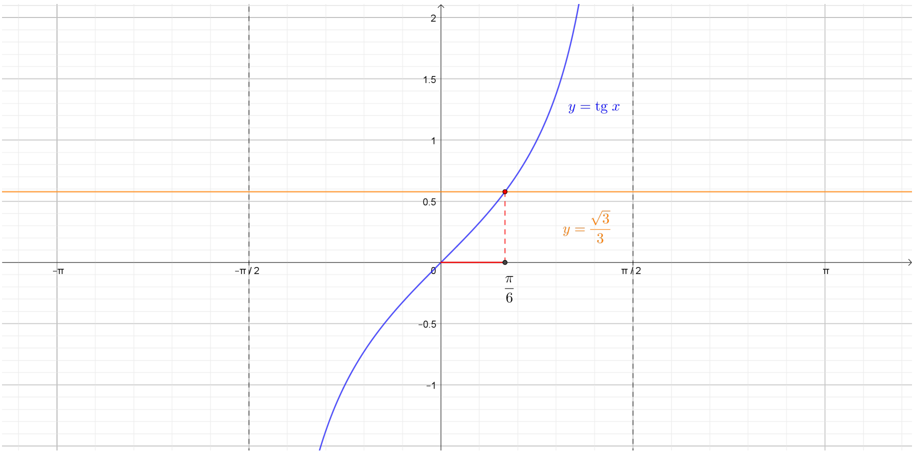
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 3

Równanie do rozwiązania:

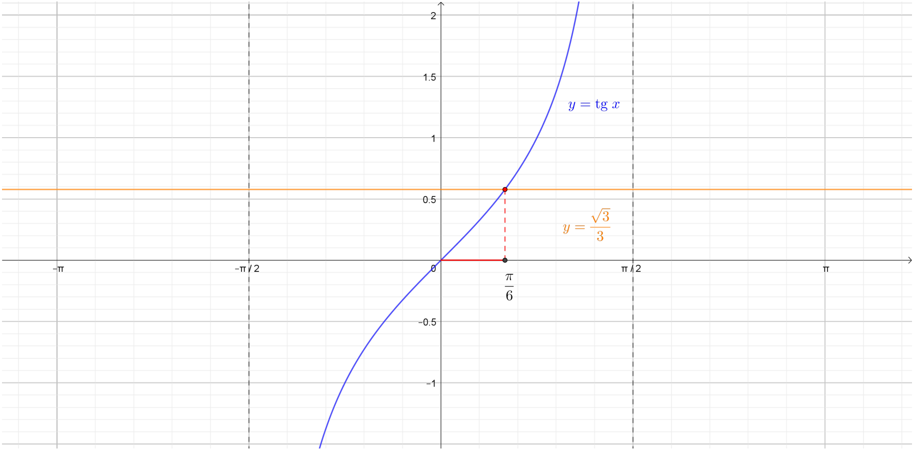
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rysujemy jeden okres wykresu funkcji tangens (pamiętajmy, że okres podstawowy funkcji tangens to π, najlepiej narysować od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$) oraz prostą $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 3

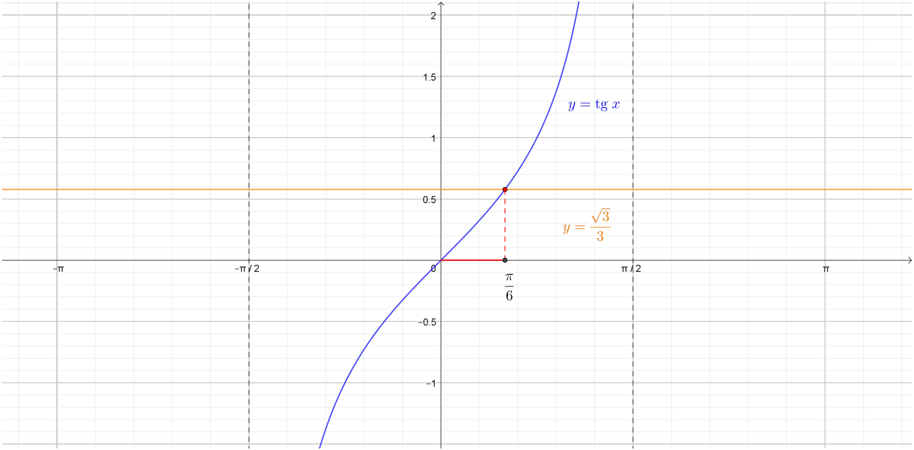


Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 3



Widzimy jedno rozwiązanie (czerwony punkt).

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 3



Widzimy jedno rozwiązanie (czerwony punkt). Znamy je z tabelki, $x = \frac{\pi}{6}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 3

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

jest:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 3

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

jest:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 4

Równanie do rozwiązania:

$$\operatorname{ctg} x = 1$$

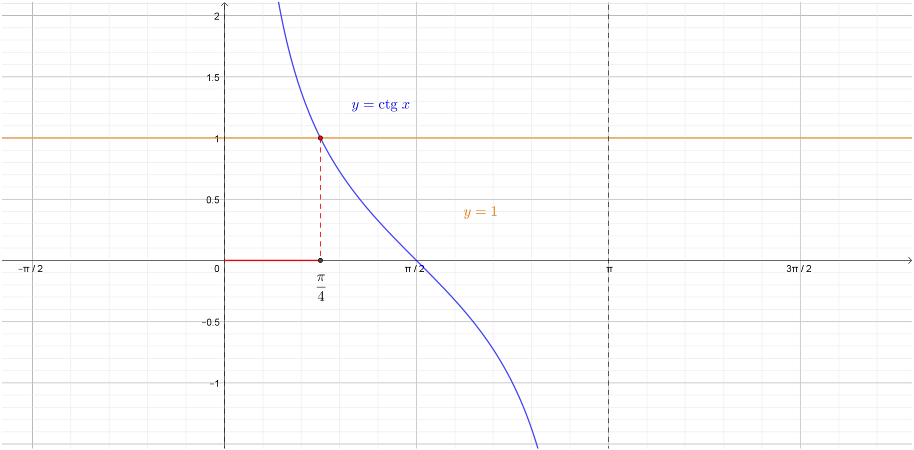
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 4

Równanie do rozwiązania:

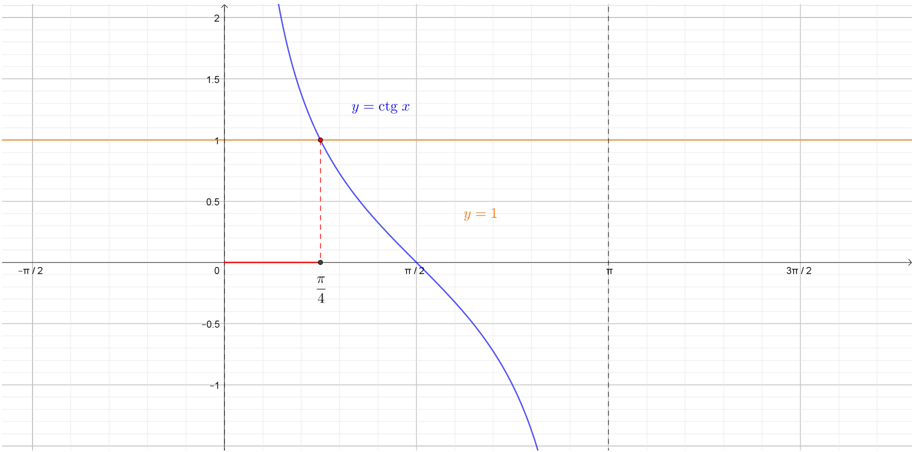
$$\operatorname{ctg} x = 1$$

Rysujemy jeden okres wykresu funkcji cotangens (okres podstawowy funkcji cotangens to π, najlepiej narysować od 0 do π) oraz prostą $y = 1$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 4

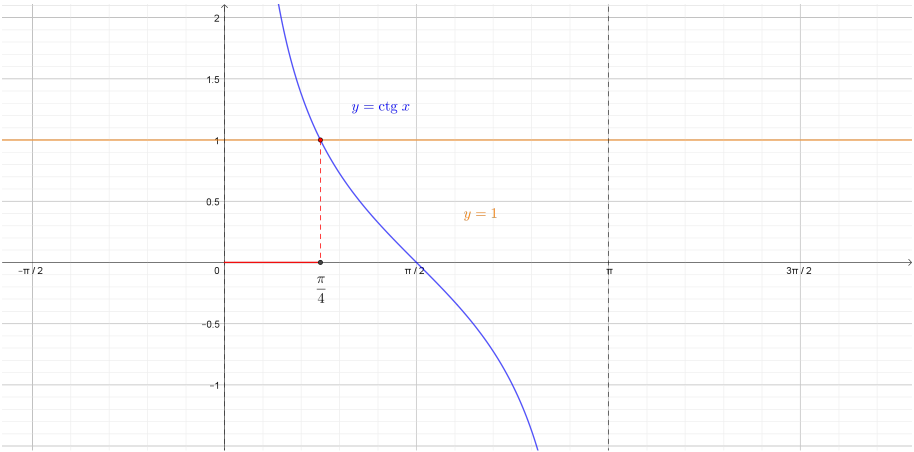


Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 4



Widzimy jedno rozwiązanie (czerwony punkt).

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 4



Widzimy jedno rozwiązanie (czerwony punkt). Znamy je z tabelki, $x = \frac{\pi}{4}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 4

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{ctg} x = 1$$

jest:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 4

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{ctg} x = 1$$

jest:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

  Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos x = 0$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos x = 0$$

  Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos x = 0$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\operatorname{ctg} x = 0$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\operatorname{ctg} x = 0$$

Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\operatorname{ctg} x = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 5

Równanie do rozwiązania:

$$\sin x = -1$$

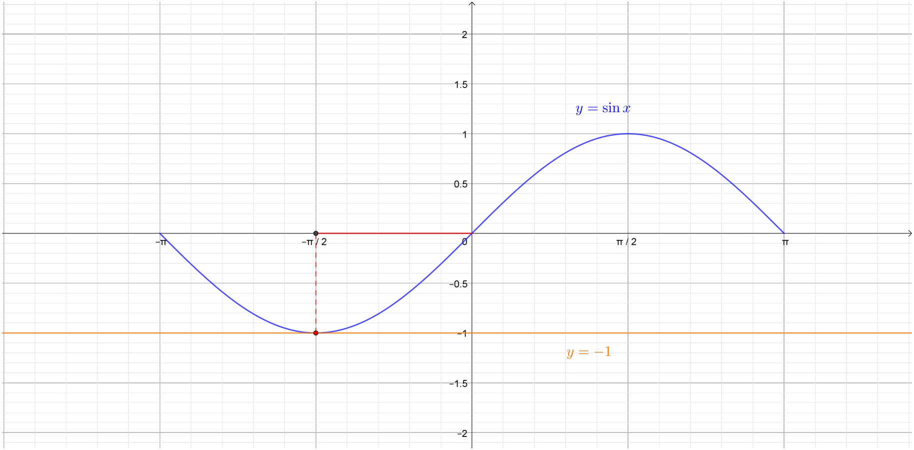
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 5

Równanie do rozwiązania:

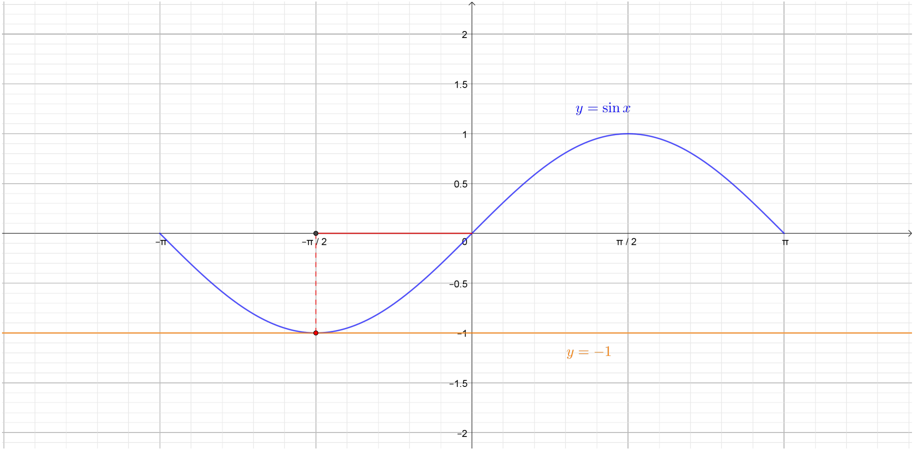
$$\sin x = -1$$

Rysujemy jeden okres wykresu funkcji sinus oraz prostą $y = -1$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 5



Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 5



Widzimy jedno rozwiązanie. Jest to oczywiście $x = -\frac{\pi}{2}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 5

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\sin x = -1$$

są:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 5

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\sin x = -1$$

są:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 6

Równanie do rozwiązania:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

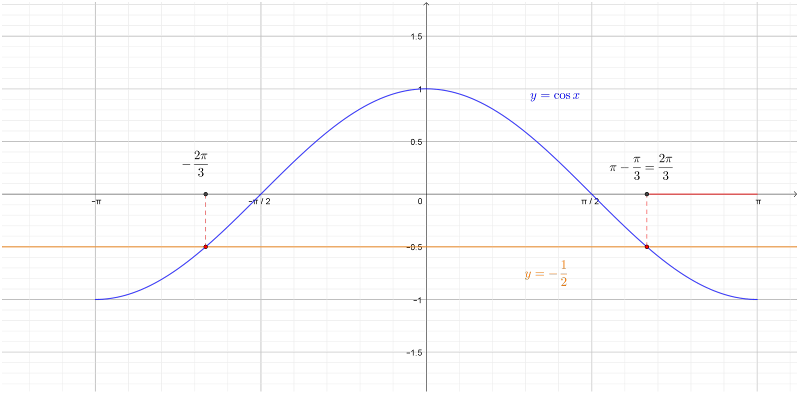
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 6

Równanie do rozwiązania:

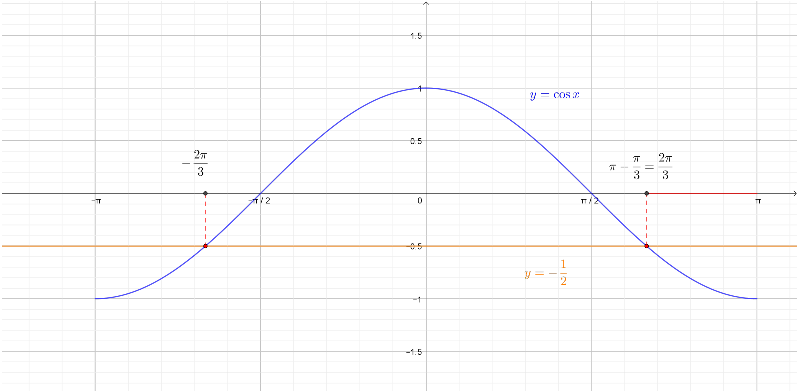
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Rysujemy jeden okres wykresu funkcji cosinus oraz prostą $y = -\frac{1}{2}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 6



Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 6



Widzimy dwa rozwiązania. Gdybyśmy szukali rozwiązania $\cos x = \frac{1}{2}$, to z tabelki mielibyśmy $x = \frac{\pi}{3}$, tutaj korzystamy z symmetrii i otrzymujemy jedno rozwiązanie $x = \frac{2\pi}{3}$ i drugie znów korzystając z symetrii $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 6

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

są:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 6

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

są:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 7

Równanie do rozwiązania:

$$\operatorname{tg} x = -1$$

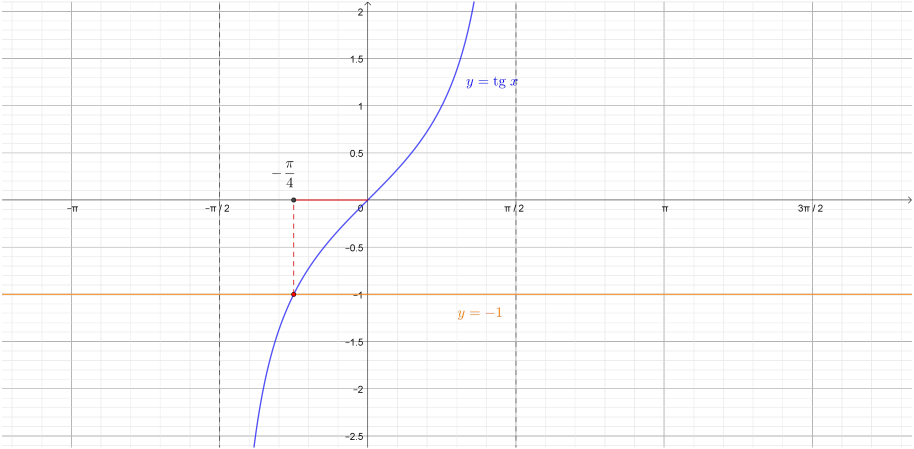
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 7

Równanie do rozwiązania:

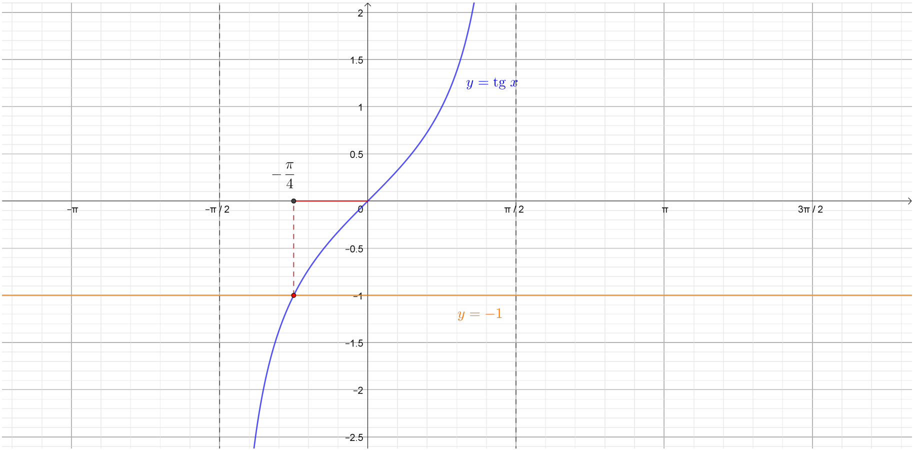
$$\operatorname{tg} x = -1$$

Rysujemy jeden okres wykresu funkcji tangens oraz prostą $y = -1$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 7



Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 7



Widzimy jedno rozwiązanie. Gdybyśmy rozwiązywali $\operatorname{tg} x = 1$, to byłoby to $x = \frac{\pi}{4}$, więc tutaj mamy oczywiście $x = -\frac{\pi}{4}$

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 7

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{tg} x = -1$$

jest:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 7

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{tg} x = -1$$

jest:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 8

Równanie do rozwiązania:

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$$

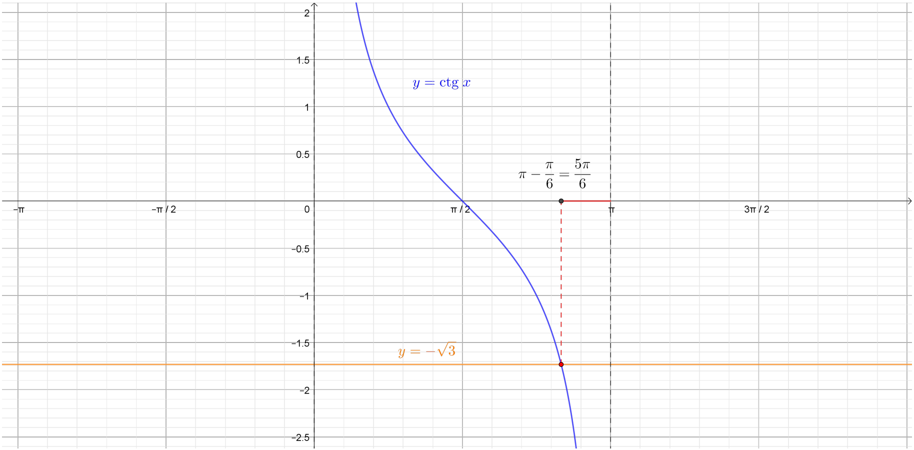
Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 8

Równanie do rozwiązania:

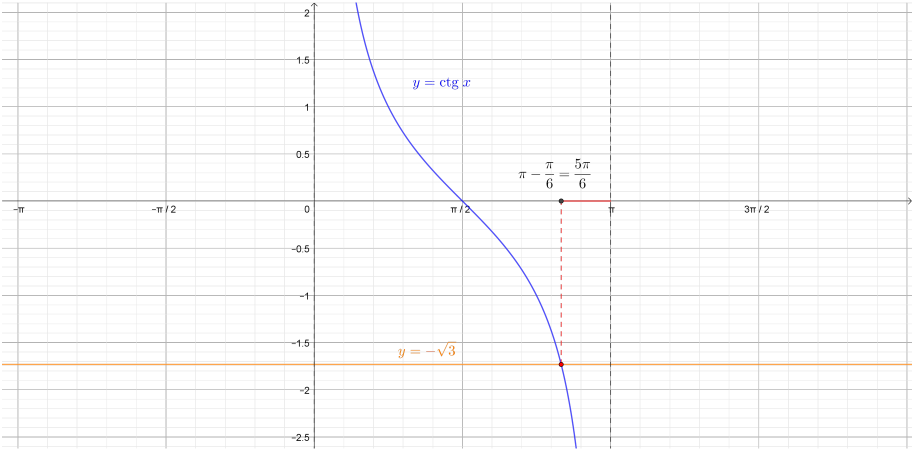
$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$$

Rysujemy jeden okres wykresu funkcji tangens oraz prostą $y = -\sqrt{3}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 8



Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 8



Widzimy jedno rozwiązanie. Gdybyśmy rozwiązywali $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, to byłoby to $x = \frac{\pi}{6}$, więc tutaj mamy $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 8

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$$

jest:

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 8

Otrzymujemy, że rozwiązaniami równania

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$$

jest:

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

  Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

Rozwiąż samodzielnie poniższe równania:

- Równanie:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

  Rozwiązanie:

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

  Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\operatorname{ctg} x = -1$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\operatorname{ctg} x = -1$$

Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:
$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
Rozwiązanie:
$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:
$$\operatorname{ctg} x = -1$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9

Może się zdarzyć, że interesują nas nie wszystkie rozwiązania, ale tylko rozwiązania należące do określonego przedziału.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9

Może się zdarzyć, że interesują nas nie wszystkie rozwiązania, ale tylko rozwiązania należące do określonego przedziału.
Rozwiąż równanie

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

w przedziale $\langle 0, 3\pi \rangle$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9

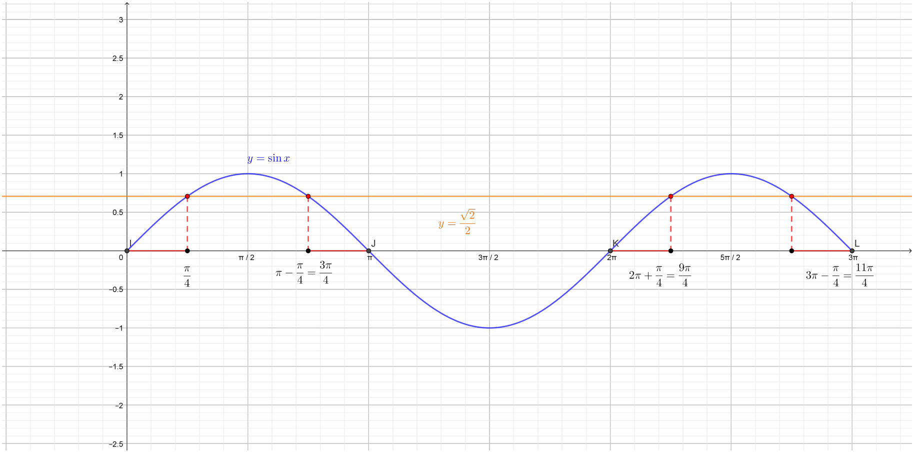
Może się zdarzyć, że interesują nas nie wszystkie rozwiązania, ale tylko rozwiązania należące do określonego przedziału.
Rozwiąż równanie

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

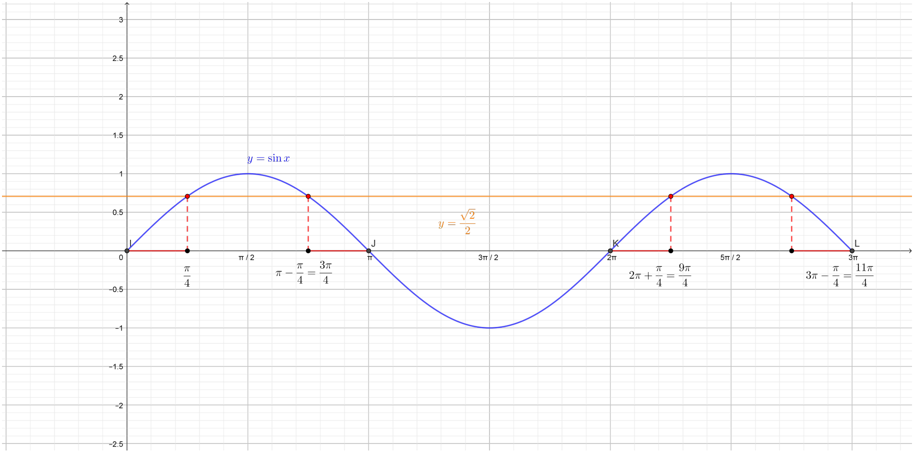
w przedziale $\langle 0, 3\pi \rangle$.

Tu sprawa jest nawet prostsza. Rysujemy funkje $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $y = \sin x$, ale tylko dla $\langle 0, 3\pi \rangle$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9

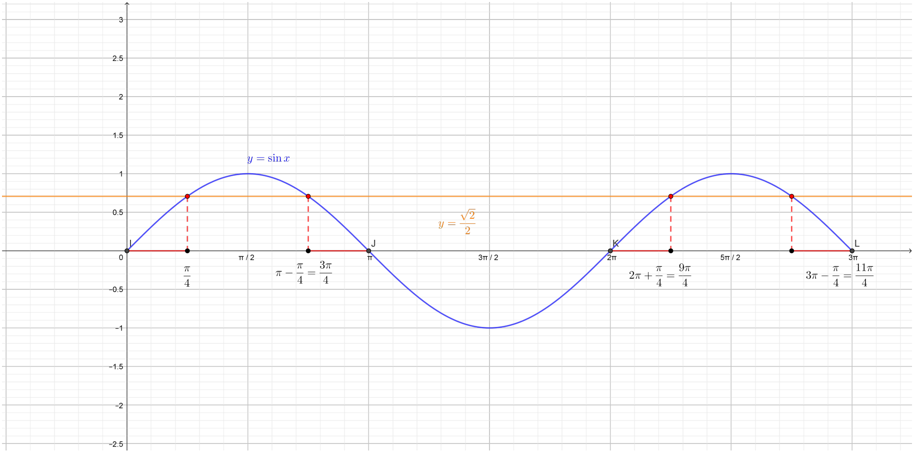


Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9



Mamy cztery rozwiązania.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9



Mamy cztery rozwiązania. Jedno znamy z tabelki, pozostałe można odczytać korzystając z symetrii wykresu.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9

Ostatecznie rozwiązaniami równania

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

w przedziale $\langle 0, 3\pi \rangle$ są

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 9

Ostatecznie rozwiązaniami równania

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

w przedziale $\langle 0, 3\pi \rangle$ są $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$ lub $x = \frac{9\pi}{4}$ lub $x = \frac{11\pi}{4}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 10

Rozwiąż równanie

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -2\pi, \pi \rangle$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 10

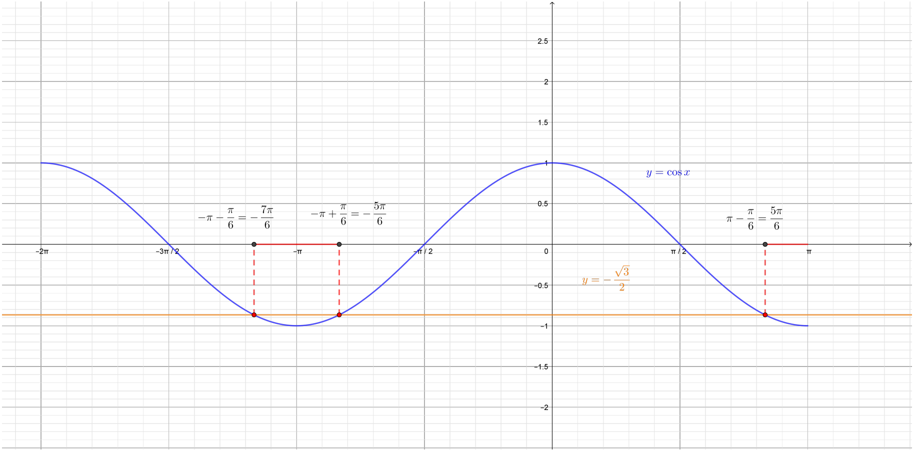
Rozwiąż równanie

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

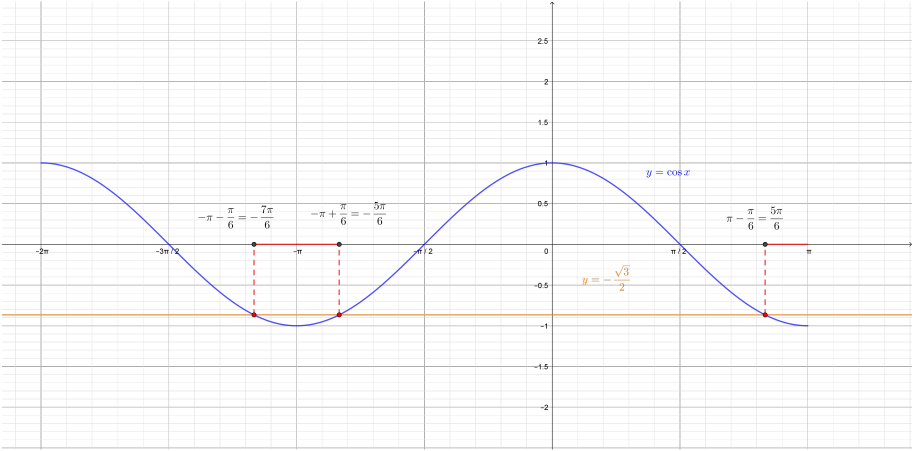
w przedziale $\langle -2\pi, \pi \rangle$.

Rysujemy funkje $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $y = \cos x$, ale tylko dla $\langle -2\pi, \pi \rangle$.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 10

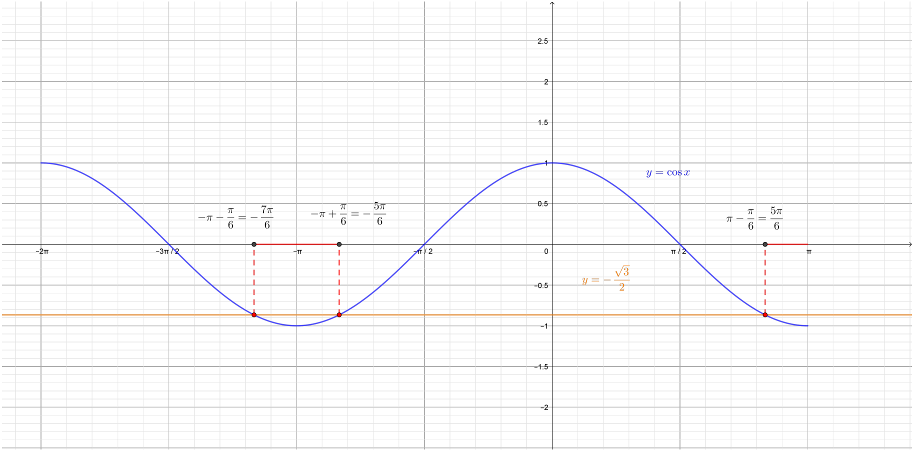


Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 10



Mamy trzy rozwiązania.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 10



Mamy trzy rozwiązania. Gdybyśmy rozwiązywali $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, to mielibyśmy rozwiązanie z tabelki $x = \frac{\pi}{6}$, na tej podstawie odczytujemy rozwiązania z wykresu.

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 10

Ostatecznie rozwiązaniami równania

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -2\pi, \pi \rangle$ są

Podstawowe równania trygonometryczne - przykład 10

Ostatecznie rozwiązaniami równania

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -2\pi, \pi \rangle$ są $x = -\frac{7\pi}{6}$ lub $x = -\frac{5\pi}{6}$ lub $x = \frac{5\pi}{6}$.

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -1$$

w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -1$$

w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.
Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -1$$

w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.
Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{4}$$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:
$$\operatorname{tg} x = -1$$
w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.
Rozwiązanie:
$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{4}$$

- Równanie:
$$\sin x = 1$$
w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:
$$\operatorname{tg} x = -1$$
w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.
Rozwiązanie:
$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{4}$$

- Równanie:
$$\sin x = 1$$
w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$
Rozwiązanie:

Podstawowe równania trygonometryczne - ćwiczenia

- Równanie:

$$\operatorname{tg} x = -1$$

  w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.
  Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{4}$$

- Równanie:

$$\sin x = 1$$

  w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$
  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{2}$$

Opanowanie rozwiązywania prostych równań trygonometrycznych to **podstawa**.

Opanowanie rozwiązywania prostych równań trygonometrycznych to **podstawa**. W dalszych przykładach będziemy już zakładali, że te proste równania każdy umie szybko rozwiązać.

Opanowanie rozwiązywania prostych równań trygonometrycznych to **podstawa**. W dalszych przykładach będziemy już zakładali, że te proste równania każdy umie szybko rozwiązać.

Na prezentacji nie będę już za każdym razem rysował wykresu funkcji, by odczytać rozwiązania - ten krok będzie pominięty, ale Wy powinniście to robić.

Opanowanie rozwiązywania prostych równań trygonometrycznych to **podstawa**. W dalszych przykładach będziemy już zakładali, że te proste równania każdy umie szybko rozwiązać.

Na prezentacji nie będę już za każdym razem rysował wykresu funkcji, by odczytać rozwiązania - ten krok będzie pominięty, ale Wy powinniście to robić. To znaczy jeśli w rozwiązaniu dochodzimy do podstawowego równania trygonometrycznego, to rozwiązujemy je tak, jak na poprzednich slajdach.

Przechodzimy teraz do równań, w których konieczne są pewne przekształcenia.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin(3x) + 4 = 3$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin(3x) + 4 = 3$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin(3x) + 4 = 3$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

i teraz rozwiązujemy tak, jak podstawowe równanie (ale zamiast x mamy $3x$), czyli otrzymujemy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin(3x) + 4 = 3$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

i teraz rozwiązujemy tak, jak podstawowe równanie (ale zamiast x mamy $3x$), czyli otrzymujemy:

$$3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 3x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin(3x) + 4 = 3$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

i teraz rozwiązujemy tak, jak podstawowe równanie (ale zamiast x mamy $3x$), czyli otrzymujemy:

$$3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 3x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

dzielimy obie strony przez 3, żeby obliczyć x:

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

i to jest nasze ostateczne rozwiązanie.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -1$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -1$$

i rozwiązujemy tak, jak podstawowe równanie (zamiast x mamy $2x - \frac{\pi}{3}$), otrzymujemy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -1$$

i rozwiązujemy tak, jak podstawowe równanie (zamiast x mamy $2x - \frac{\pi}{3}$), otrzymujemy:

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -1$$

i rozwiązujemy tak, jak podstawowe równanie (zamiast x mamy $2x - \frac{\pi}{3}$), otrzymujemy:

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

przekształcamy, żeby obliczyć x:

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

i to jest nasze rozwiązanie.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{tg}^2(5x) - 3 = 0$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{tg}^2(5x) - 3 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\operatorname{tg}(5x) = -\sqrt{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{tg}(5x) = \sqrt{3}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\mathrm{tg}^2(5x) - 3 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\mathrm{tg}(5x) = -\sqrt{3} \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{tg}(5x) = \sqrt{3}$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $5x$), otrzymujemy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\mathrm{tg}^2(5x) - 3 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\mathrm{tg}(5x) = -\sqrt{3} \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{tg}(5x) = \sqrt{3}$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $5x$), otrzymujemy:

$$5x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{tg}^2(5x) - 3 = 0$$

Przekształcamy do postaci:

$$\operatorname{tg}(5x) = -\sqrt{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{tg}(5x) = \sqrt{3}$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $5x$), otrzymujemy:

$$5x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

przekształcamy, żeby obliczyć x:

$$x = -\frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

i to jest nasze rozwiązanie.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\,\mathrm{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $\frac{x}{2}$), otrzymujemy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $\frac{x}{2}$), otrzymujemy:

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $\frac{x}{2}$), otrzymujemy:

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

przekształcamy, żeby obliczyć x:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

i to jest nasze rozwiązanie.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$|2\cos(3x) - 1| = 1$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$|2\cos(3x) - 1| = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(3x) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \cos(3x) = 1$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$|2\cos(3x) - 1| = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(3x) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \cos(3x) = 1$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $3x$), otrzymujemy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$|2\cos(3x) - 1| = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(3x) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \cos(3x) = 1$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $3x$), otrzymujemy:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad 3x = 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$|2\cos(3x) - 1| = 1$$

Przekształcamy do postaci:

$$\cos(3x) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \cos(3x) = 1$$

i rozwiązujemy dwa podstawowe równania (ale zamiast x mamy $3x$), otrzymujemy:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad 3x = 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

przekształcamy, żeby obliczyć x:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

i to jest nasze rozwiązanie.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2\sin(7x) + 1| = 2$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2\sin(7x) + 1| = 2$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(7x) = -\frac{3}{2} \qquad \text{lub} \qquad \sin(7x) = \frac{1}{2}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2\sin(7x) + 1| = 2$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(7x) = -\frac{3}{2} \qquad \text{lub} \qquad \sin(7x) = \frac{1}{2}$$

pierwsze równanie nie ma rozwiązań, drugie jest podstawowe (zamiast x jest $7x$), otrzymujemy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2\sin(7x)+1|=2$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(7x)=-\frac{3}{2} \qquad \text{lub} \qquad \sin(7x)=\frac{1}{2}$$

pierwsze równanie nie ma rozwiązań, drugie jest podstawowe (zamiast x jest $7x$), otrzymujemy:

$$7x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 7x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{gdzie } k\in\mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2\sin(7x) + 1| = 2$$

Przekształcamy do postaci:

$$\sin(7x) = -\frac{3}{2} \qquad \text{lub} \qquad \sin(7x) = \frac{1}{2}$$

pierwsze równanie nie ma rozwiązań, drugie jest podstawowe (zamiast x jest $7x$), otrzymujemy:

$$7x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 7x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

przekształcamy, żeby obliczyć x:

$$x = \frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

i to jest nasze rozwiązanie.

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin^2(5x) - 1 = 0$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin^2(5x) - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin^2(5x) - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin^2(5x) - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\left|2\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 3\right| = 2$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin^2(5x) - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\left|2\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 3\right| = 2$$

Rozwiązanie:

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:
$$2\sin^2(5x) - 1 = 0$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:
$$\left|2\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 3\right| = 2$$
Rozwiązanie:
$$x = -\pi + 6k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \pi + 6k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia cd.

- Równanie:
$$3\operatorname{tg}^2(2x - \frac{\pi}{2}) - 1 = 0$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia cd.

- Równanie:

$$3\,\mathrm{tg}^2(2x - \frac{\pi}{2}) - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia cd.

- Równanie:

$$3\,\mathrm{tg}^2(2x - \frac{\pi}{2}) - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia cd.

- Równanie:

$$3\operatorname{tg}^2(2x - \frac{\pi}{2}) - 1 = 0$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$|2\operatorname{ctg}(4x) - 1| = 1$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia cd.

- Równanie:
$$3\,\mathrm{tg}^2(2x - \frac{\pi}{2}) - 1 = 0$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:
$$|2\,\mathrm{ctg}(4x) - 1| = 1$$
Rozwiązanie:

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia cd.

- Równanie:
$$3\operatorname{tg}^2(2x - \frac{\pi}{2}) - 1 = 0$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:
$$|2\operatorname{ctg}(4x) - 1| = 1$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

Może się zdarzyć przykład, w którym x należy do określonego przedziału, np.: Rozwiąż równanie:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

Może się zdarzyć przykład, w którym x należy do określonego przedziału, np.: Rozwiąż równanie:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

W takiej sytuacji możemy postępować na dwa sposoby (osobiście polecam ten drugi).

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

Może się zdarzyć przykład, w którym x należy do określonego przedziału, np.: Rozwiąż równanie:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

W takiej sytuacji możemy postępować na dwa sposoby (osobiście polecam ten drugi). Pierwszy sposób to rozwiązanie równania bez ograniczenia do danego przedziału.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

Może się zdarzyć przykład, w którym x należy do określonego przedziału, np.: Rozwiąż równanie:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

W takiej sytuacji możemy postępować na dwa sposoby (osobiście polecam ten drugi). Pierwszy sposób to rozwiązanie równania bez ograniczenia do danego przedziału. Otrzymamy wtedy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

Może się zdarzyć przykład, w którym x należy do określonego przedziału, np.: Rozwiąż równanie:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

W takiej sytuacji możemy postępować na dwa sposoby (osobiście polecam ten drugi). Pierwszy sposób to rozwiązanie równania bez ograniczenia do danego przedziału. Otrzymamy wtedy:

$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

Może się zdarzyć przykład, w którym x należy do określonego przedziału, np.: Rozwiąż równanie:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

W takiej sytuacji możemy postępować na dwa sposoby (osobiście polecam ten drugi). Pierwszy sposób to rozwiązanie równania bez ograniczenia do danego przedziału. Otrzymamy wtedy:

$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

czyli:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

Może się zdarzyć przykład, w którym x należy do określonego przedziału, np.: Rozwiąż równanie:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

W takiej sytuacji możemy postępować na dwa sposoby (osobiście polecam ten drugi). Pierwszy sposób to rozwiązanie równania bez ograniczenia do danego przedziału. Otrzymamy wtedy:

$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

czyli:

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Teraz musimy tak dobrać k, by nasze rozwiązania mieściły się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Teraz musimy tak dobrać k, by nasze rozwiązania mieściły się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Po krótkim zastanowieniu mamy: $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} = \frac{11\pi}{12}$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Teraz musimy tak dobrać k, by nasze rozwiązania mieściły się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Po krótkim zastanowieniu mamy: $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} = \frac{11\pi}{12}$. Czyli mamy cztery rozwiązania.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Teraz musimy tak dobrać k, by nasze rozwiązania mieściły się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Po krótkim zastanowieniu mamy: $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} = \frac{11\pi}{12}$. Czyli mamy cztery rozwiązania.

Wróćmy jeszcze do początku:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Teraz musimy tak dobrać k, by nasze rozwiązania mieściły się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Po krótkim zastanowieniu mamy: $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} = \frac{11\pi}{12}$. Czyli mamy cztery rozwiązania.

Wróćmy jeszcze do początku:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.
Druga metoda to podstawienie $\alpha = 4x$, wtedy rozwiązujemy równanie:

$$2\cos\alpha - 1 = 0$$

gdzie $\alpha \in \langle 0, 4\pi \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Teraz musimy tak dobrać k, by nasze rozwiązania mieściły się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Po krótkim zastanowieniu mamy: $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} = \frac{11\pi}{12}$. Czyli mamy cztery rozwiązania.

Wróćmy jeszcze do początku:

$$2\cos 4x - 1 = 0$$

gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.
Druga metoda to podstawienie $\alpha = 4x$, wtedy rozwiązujemy równanie:

$$2\cos \alpha - 1 = 0$$

gdzie $\alpha \in \langle 0, 4\pi \rangle$. Pamiętajmy o zmianie przedziału!

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$2\cos\alpha - 1 = 0$$

gdzie $\alpha \in \langle 0, 4\pi \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$2\cos\alpha - 1 = 0$$

gdzie $\alpha \in \langle 0, 4\pi \rangle$.

Rysujemy $\cos\alpha$ w przedziale $\langle 0, 4\pi \rangle$ i odczytujemy rozwiązania:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{5\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{7\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{11\pi}{3}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$2\cos\alpha - 1 = 0$$

gdzie $\alpha \in \langle 0, 4\pi \rangle$.

Rysujemy $\cos\alpha$ w przedziale $\langle 0, 4\pi \rangle$ i odczytujemy rozwiązania:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{5\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{7\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{11\pi}{3}$$

Wracamy do x, a skoro $\alpha = 4x$, to $x = \frac{\alpha}{4}$, czyli mamy:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 7

$$2\cos\alpha - 1 = 0$$

gdzie $\alpha \in \langle 0, 4\pi \rangle$.

Rysujemy $\cos\alpha$ w przedziale $\langle 0, 4\pi \rangle$ i odczytujemy rozwiązania:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{5\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{7\pi}{3} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{11\pi}{3}$$

Wracamy do x, a skoro $\alpha = 4x$, to $x = \frac{\alpha}{4}$, czyli mamy:

$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{12} \quad \text{lub} \quad x = \frac{7\pi}{12} \quad \text{lub} \quad x = \frac{11\pi}{12}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

gdzie $x \in \langle -2\pi, 6\pi \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

gdzie $x \in \langle -2\pi, 6\pi \rangle$.

Rozwiążemy podstawiając $\alpha = \frac{x}{2}$, czyli otrzymujemy równanie:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

gdzie $x \in \langle -2\pi, 6\pi \rangle$.

Rozwiążemy podstawiając $\alpha = \frac{x}{2}$, czyli otrzymujemy równanie:

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

gdzie $\alpha \in \langle -\pi, 3\pi \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

gdzie $x \in \langle -2\pi, 6\pi \rangle$.

Rozwiążemy podstawiając $\alpha = \frac{x}{2}$, czyli otrzymujemy równanie:

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

gdzie $\alpha \in \langle -\pi, 3\pi \rangle$.
co oczywiście daje:

$$\sin \alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiązujemy

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -\pi, 3\pi\rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiązujemy

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -\pi, 3\pi\rangle$. Rysujemy wykres funkcji *sinus* w tym przedziale oraz proste $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i odczytujemy rozwiązania.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiązujemy

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -\pi, 3\pi \rangle$. Rysujemy wykres funkcji *sinus* w tym przedziale oraz proste $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ i odczytujemy rozwiązania. Jest ich osiem:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiązujemy

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -\pi, 3\pi \rangle$. Rysujemy wykres funkcji *sinus* w tym przedziale oraz proste $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i odczytujemy rozwiązania. Jest ich osiem:

$$\alpha \in \{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\}$$

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiązujemy

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -\pi, 3\pi\rangle$. Rysujemy wykres funkcji *sinus* w tym przedziale oraz proste $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i odczytujemy rozwiązania. Jest ich osiem:

$$\alpha \in \{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\}$$

Teraz wracamy do x.

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiązujemy

$$\sin \alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -\pi, 3\pi\rangle$. Rysujemy wykres funkcji *sinus* w tym przedziale oraz proste $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i odczytujemy rozwiązania. Jest ich osiem:

$$\alpha \in \{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\}$$

Teraz wracamy do x. Skoro $\alpha = \frac{x}{2}$, to mamy $x = 2\alpha$, czyli mamy następujące osiem rozwiązań:

Przekształcenia podstawowych równań - przykład 8

Rozwiązujemy

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

w przedziale $\langle -\pi, 3\pi \rangle$. Rysujemy wykres funkcji *sinus* w tym przedziale oraz proste $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i odczytujemy rozwiązania. Jest ich osiem:

$$\alpha \in \{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\}$$

Teraz wracamy do x. Skoro $\alpha = \frac{x}{2}$, to mamy $x = 2\alpha$, czyli mamy następujące osiem rozwiązań:

$$x \in \{-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}\}$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$\cos^2(3x) = \frac{1}{2}$$

  w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$\cos^2(3x) = \frac{1}{2}$$

  w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rozwiązanie:

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$\cos^2(3x) = \frac{1}{2}$$

w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:

$$\cos^2(3x) = \frac{1}{2}$$

w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

- Równanie:

$$\mathrm{tg}^2(2x) = 3$$

w przedziale $\langle -\pi, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:
$$\cos^2(3x) = \frac{1}{2}$$
w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

- Równanie:
$$\text{tg}^2(2x) = 3$$
w przedziale $\langle -\pi, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rozwiązanie:

Przekształcenia podstawowych równań - ćwiczenia

- Równanie:
$$\cos^2(3x) = \frac{1}{2}$$
w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

- Równanie:
$$\mathrm{tg}^2(2x) = 3$$
w przedziale $\langle -\pi, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rozwiązanie:
$$x \in \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\}$$

Teraz przejdziemy do równań, które można łatwo rozłożyć na czynniki (nawiasy), przez co otrzymujemy kilka równań podstawowych.

Rozkładanie na czynniki - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Mamy tutaj do czynienia z równaniem kwadratowym (po podstawieniu $s = \sin x$), ale może poradzimy sobie bez podstawiania. Po prostu rozkładamy lewą stronę na dwa nawiasy:

Rozkładanie na czynniki - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Mamy tutaj do czynienia z równaniem kwadratowym (po podstawieniu $s = \sin x$), ale może poradzimy sobie bez podstawiania. Po prostu rozkładamy lewą stronę na dwa nawiasy:

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Mamy tutaj do czynienia z równaniem kwadratowym (po podstawieniu $s = \sin x$), ale może poradzimy sobie bez podstawiania. Po prostu rozkładamy lewą stronę na dwa nawiasy:

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \sin(x) = -1$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Mamy tutaj do czynienia z równaniem kwadratowym (po podstawieniu $s = \sin x$), ale może poradzimy sobie bez podstawiania. Po prostu rozkładamy lewą stronę na dwa nawiasy:

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \sin(x) = -1$$

Rozwiązujemy te podstawowe równania i mamy odpowiedź:

Rozkładanie na czynniki - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Mamy tutaj do czynienia z równaniem kwadratowym (po podstawieniu $s = \sin x$), ale może poradzimy sobie bez podstawiania. Po prostu rozkładamy lewą stronę na dwa nawiasy:

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \sin(x) = -1$$

Rozwiązujemy te podstawowe równania i mamy odpowiedź:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

Rozkładanie na czynniki - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \cos(x) = 2$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \cos(x) = 2$$

Drugie równanie nie ma rozwiązań, rozwiązując pierwsze otrzymujemy:

Rozkładanie na czynniki - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \cos(x) = 2$$

Drugie równanie nie ma rozwiązań, rozwiązując pierwsze otrzymujemy:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Spróbujmy rozłożyć, ale najpierw wyciągniemy z pierwszych dwóch wyrazów $2\sin x$, otrzymujemy:

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Spróbujmy rozłożyć, ale najpierw wyciągniemy z pierwszych dwóch wyrazów $2\sin x$, otrzymujemy:

$$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Spróbujmy rozłożyć, ale najpierw wyciągniemy z pierwszych dwóch wyrazów $2\sin x$, otrzymujemy:

$$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

Mamy więc:

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Spróbujmy rozłożyć, ale najpierw wyciągniemy z pierwszych dwóch wyrazów $2\sin x$, otrzymujemy:

$$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

Mamy więc:

$$(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Spróbujmy rozłożyć, ale najpierw wyciągniemy z pierwszych dwóch wyrazów $2\sin x$, otrzymujemy:

$$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

Mamy więc:

$$(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \cos(x) = 1$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Spróbujmy rozłożyć, ale najpierw wyciągniemy z pierwszych dwóch wyrazów $2\sin x$, otrzymujemy:

$$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

Mamy więc:

$$(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \cos(x) = 1$$

Rozwiązujemy te podstawowe równania i mamy odpowiedź:

Rozkładanie na czynniki - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Spróbujmy rozłożyć, ale najpierw wyciągniemy z pierwszych dwóch wyrazów $2\sin x$, otrzymujemy:

$$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

Mamy więc:

$$(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

Czyli otrzymujemy:

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \cos(x) = 1$$

Rozwiązujemy te podstawowe równania i mamy odpowiedź:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = 2k\pi \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\,\mathrm{tg}^4 x - 10\,\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0$$

Tutaj moglibyśmy podstawić $t = \mathrm{tg}^2 x$, ale spróbujmy od razu rozłożyć:

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

Tutaj moglibyśmy podstawić $t = \operatorname{tg}^2 x$, ale spróbujmy od razu rozłożyć:

$$(3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

Tutaj moglibyśmy podstawić $t = \operatorname{tg}^2 x$, ale spróbujmy od razu rozłożyć:

$$(3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

Moglibyśmy dalej rozkładać (korzystając z różnicy kwadratów), ale po prostu zapiszmy, że:

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

Tutaj moglibyśmy podstawić $t = \operatorname{tg}^2 x$, ale spróbujmy od razu rozłożyć:

$$(3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

Moglibyśmy dalej rozkładać (korzystając z różnicy kwadratów), ale po prostu zapiszmy, że:

$$\operatorname{tg}(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{tg}(x) = \pm\sqrt{3}$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

Tutaj moglibyśmy podstawić $t = \operatorname{tg}^2 x$, ale spróbujmy od razu rozłożyć:

$$(3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

Moglibyśmy dalej rozkładać (korzystając z różnicy kwadratów), ale po prostu zapiszmy, że:

$$\operatorname{tg}(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{tg}(x) = \pm\sqrt{3}$$

Rozwiązujemy te podstawowe równania i mamy odpowiedź:

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

Tutaj moglibyśmy podstawić $t = \operatorname{tg}^2 x$, ale spróbujmy od razu rozłożyć:

$$(3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

Moglibyśmy dalej rozkładać (korzystając z różnicy kwadratów), ale po prostu zapiszmy, że:

$$\operatorname{tg}(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{tg}(x) = \pm\sqrt{3}$$

Rozwiązujemy te podstawowe równania i mamy odpowiedź:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Rozkładanie na czynniki - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

Tutaj moglibyśmy podstawić $t = \operatorname{tg}^2 x$, ale spróbujmy od razu rozłożyć:

$$(3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

Moglibyśmy dalej rozkładać (korzystając z różnicy kwadratów), ale po prostu zapiszmy, że:

$$\operatorname{tg}(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{tg}(x) = \pm\sqrt{3}$$

Rozwiązujemy te podstawowe równania i mamy odpowiedź:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Zastanów się, czy rozumiesz, skąd wzięła się ta odpowiedź.

Rozkład na czynniki - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

Rozkład na czynniki - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Rozkład na czynniki - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

  Rozwiązanie:

$$x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\sin x \cos x + \sin x - \cos x - 1 = 0$$

Rozkład na czynniki - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\sin x \cos x + \sin x - \cos x - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Rozkład na czynniki - ćwiczenia cd.

- Równanie:

$$\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 3 = 0$$

Rozkład na czynniki - ćwiczenia cd.

- Równanie:

$$\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 3 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Rozkład na czynniki - ćwiczenia cd.

- Równanie:

$$\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 3 = 0$$

  Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\sin^3 x - 4\sin^2 x - \sin x + 4 = 0$$

Rozkład na czynniki - ćwiczenia cd.

- Równanie:
$$\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 3 = 0$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:
$$\sin^3 x - 4\sin^2 x - \sin x + 4 = 0$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Zwiększamy stopień trudności.

Zwiększamy stopień trudności. Do arsenału dodajemy jedynkę trygonometryczną, którą możemy wykorzystywać, by przekształcać dane równania.

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy o najważniejszej tożsamości w trygonometrii:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy o najważniejszej tożsamości w trygonometrii:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

W pierwszej klasie wykorzystywaliśmy je do rozwiązywania zadań typu:

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy o najważniejszej tożsamości w trygonometrii:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

W pierwszej klasie wykorzystywaliśmy je do rozwiązywania zadań typu:

Zadanie z I klasy

Dany jest kąt α, dla którego $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Oblicz $\sin\alpha$ oraz $\operatorname{ctg}\alpha$.

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy o najważniejszej tożsamości w trygonometrii:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

W pierwszej klasie wykorzystywaliśmy je do rozwiązywania zadań typu:

Zadanie z I klasy

Dany jest kąt α, dla którego $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Oblicz $\sin\alpha$ oraz $\operatorname{ctg}\alpha$.

Odpowiedzi to oczywiście $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ oraz $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy, że jedynka trygonometryczna działa dla dowolnego kąta x, czyli

$$\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ = 1$$

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy, że jedynka trygonometryczna działa dla dowolnego kąta x, czyli

$$\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ = 1$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} = 1$$

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy, że jedynka trygonometryczna działa dla dowolnego kąta x, czyli

$$\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ = 1$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} = 1$$

ale także:

$$\sin^2(3\alpha) + \cos^2(3\alpha) = 1$$

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy, że jedynka trygonometryczna działa dla dowolnego kąta x, czyli

$$\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ = 1$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} = 1$$

ale także:

$$\sin^2(3\alpha) + \cos^2(3\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\frac{x}{2} - \pi) + \cos^2(\frac{x}{2} - \pi) = 1$$

Jedynka trygonometryczna - wprowadzenie

Pamiętajmy, że jedynka trygonometryczna działa dla dowolnego kąta x, czyli

$$\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ = 1$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} = 1$$

ale także:

$$\sin^2(3\alpha) + \cos^2(3\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\frac{x}{2} - \pi) + \cos^2(\frac{x}{2} - \pi) = 1$$

Rozwiązywanie równań trygonometrycznych z wykorzystaniem jedynki sprowadza się do przekształcenia przykładu tak, by można go było rozwiązać poprzednimi metodami.

Jedynka trygonometryczna - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$5\sin x - 2\cos^2 x = 1$$

Jedynka trygonometryczna - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$5\sin x - 2\cos^2 x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $-2\cos^2 x$ na $2\sin^2 x - 2$, otrzymujemy:

Jedynka trygonometryczna - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$5\sin x - 2\cos^2 x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $-2\cos^2 x$ na $2\sin^2 x - 2$, otrzymujemy:

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

Jedynka trygonometryczna - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$5\sin x - 2\cos^2 x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $-2\cos^2 x$ na $2\sin^2 x - 2$, otrzymujemy:

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

Jedynka trygonometryczna - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$5\sin x - 2\cos^2 x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $-2\cos^2 x$ na $2\sin^2 x - 2$, otrzymujemy:

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Jedynka trygonometryczna - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 3x + \cos 3x = 1$$

Jedynka trygonometryczna - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 3x + \cos 3x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $2\sin^2 3x$ na $2 - 2\cos^2 3x$, otrzymujemy:

Jedynka trygonometryczna - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 3x + \cos 3x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $2\sin^2 3x$ na $2 - 2\cos^2 3x$, otrzymujemy:

$$2\cos^2 3x - \cos 3x - 1 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

Jedynka trygonometryczna - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 3x + \cos 3x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $2\sin^2 3x$ na $2 - 2\cos^2 3x$, otrzymujemy:

$$2\cos^2 3x - \cos 3x - 1 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\cos 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

Jedynka trygonometryczna - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\sin^2 3x + \cos 3x = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamieniamy $2\sin^2 3x$ na $2 - 2\cos^2 3x$, otrzymujemy:

$$2\cos^2 3x - \cos 3x - 1 = 0$$

Rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(2\cos 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

$$x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Jedynka trygonometryczna - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin x = 2 + \cos^2 x$$

Jedynka trygonometryczna - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin x = 2 + \cos^2 x$$

Rozwiązanie:

Jedynka trygonometryczna - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin x = 2 + \cos^2 x$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Jedynka trygonometryczna - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin x = 2 + \cos^2 x$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$2\cos^2 2x + 7\sin 2x + 2 = 0$$

Jedynka trygonometryczna - ćwiczenia

- Równanie:
$$2\sin x = 2 + \cos^2 x$$
Rozwiązanie:
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:
$$2\cos^2 2x + 7\sin 2x + 2 = 0$$
Rozwiązanie:

Jedynka trygonometryczna - ćwiczenia

- Równanie:

$$2\sin x = 2 + \cos^2 x$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$2\cos^2 2x + 7\sin 2x + 2 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności.

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności. Może się zdarzyć, że w jednym równaniu występują różne kąty.

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności. Może się zdarzyć, że w jednym równaniu występują różne kąty. Jeśli jest to coś w stylu:

$$(\sin 3x - 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności. Może się zdarzyć, że w jednym równaniu występują różne kąty. Jeśli jest to coś w stylu:

$$(\sin 3x - 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

to nie mamy żadnego problemu.

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności. Może się zdarzyć, że w jednym równaniu występują różne kąty. Jeśli jest to coś w stylu:

$$(\sin 3x - 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

to nie mamy żadnego problemu. Wprawdzie raz mamy $3x$, raz $2x$, ale łatwo dochodzimy do równań podstawowych.

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności. Może się zdarzyć, że w jednym równaniu występują różne kąty. Jeśli jest to coś w stylu:

$$(\sin 3x - 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

to nie mamy żadnego problemu. Wprawdzie raz mamy $3x$, raz $2x$, ale łatwo dochodzimy do równań podstawowych. Rozwiązanie to oczywiście:

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności. Może się zdarzyć, że w jednym równaniu występują różne kąty. Jeśli jest to coś w stylu:

$$(\sin 3x - 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

to nie mamy żadnego problemu. Wprawdzie raz mamy $3x$, raz $2x$, ale łatwo dochodzimy do równań podstawowych. Rozwiązanie to oczywiście:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Idziemy dalej, zwiększamy stopień trudności. Może się zdarzyć, że w jednym równaniu występują różne kąty. Jeśli jest to coś w stylu:

$$(\sin 3x - 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

to nie mamy żadnego problemu. Wprawdzie raz mamy $3x$, raz $2x$, ale łatwo dochodzimy do równań podstawowych. Rozwiązanie to oczywiście:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Może się jednak zdarzyć, że sprawa nie będzie taka proste i będziemy dążyli do tego, by wszędzie mieć ten sam kąt.

Podwojony kąt - wprowadzenie

Wzory, które **trzeba** pamiętać:

Podwojony kąt - wprowadzenie

Wzory, które **trzeba** pamiętać:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Podwojony kąt - wprowadzenie

Wzory, które **trzeba** pamiętać:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2\cos^2 x - 1 = \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

Podwojony kąt - wprowadzenie

Wzory, które **trzeba** pamiętać:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2\cos^2 x - 1 = \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

W przypadku *cosinusa* mamy w rzeczywistości 3 wzory, korzystamy z tegom który akurat nam pasuje.

Podwojony kąt - wprowadzenie

Pamiętajmy, że te wzory działają niezależnie od tego, czym jest x, czyli mamy np.:

$$\sin 10^\circ = 2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ$$

Podwojony kąt - wprowadzenie

Pamiętajmy, że te wzory działają niezależnie od tego, czym jest x, czyli mamy np.:

$$\sin 10^\circ = 2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ$$

$$\sin 8\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha$$

Podwojony kąt - wprowadzenie

Pamiętajmy, że te wzory działają niezależnie od tego, czym jest x, czyli mamy np.:

$$\sin 10^\circ = 2\sin 5^\circ \cos 5^\circ$$

$$\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha$$

$$\cos(10x) = 1 - 2\sin^2(5x)$$

Podwojony kąt - wprowadzenie

Pamiętajmy, że te wzory działają niezależnie od tego, czym jest x, czyli mamy np.:

$$\sin 10^\circ = 2\sin 5^\circ \cos 5^\circ$$

$$\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha$$

$$\cos(10x) = 1 - 2\sin^2(5x)$$

$$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})$$

Podwojony kąt - wprowadzenie

Pamiętajmy, że te wzory działają niezależnie od tego, czym jest x, czyli mamy np.:

$$\sin 10^\circ = 2\sin 5^\circ \cos 5^\circ$$

$$\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha$$

$$\cos(10x) = 1 - 2\sin^2(5x)$$

$$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})$$

Ważne jest, by kąt występujący we wzorze po lewej stronie tożsamości był dwukrotnością kąta występującego po prawej stronie tożsamości.

Podwojony kąt - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

Podwojony kąt - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$) i otrzymujemy:

Podwojony kąt - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$) i otrzymujemy:

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawias i mamy:

Podwojony kąt - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\sin 2x = 2 \sin x \cos x$) i otrzymujemy:

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawias i mamy:

$$\sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

Podwojony kąt - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$) i otrzymujemy:

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawias i mamy:

$$\sin x(2\cos x + 1) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

$$x = k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podwojony kąt - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(6x) - 3\cos(3x) + 1 = 0$$

Podwojony kąt - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(6x) - 3\cos(3x) + 1 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 6x = 2\cos^2(3x) - 1$), chcemy mieć same *cosinusy*) i otrzymujemy:

Podwojony kąt - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(6x) - 3\cos(3x) + 1 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 6x = 2\cos^2(3x) - 1$), chcemy mieć same *cosinusy*) i otrzymujemy:

$$2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) = 0$$

Wyciągamy $\cos(3x)$ przed nawias i mamy:

Podwojony kąt - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(6x) - 3\cos(3x) + 1 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 6x = 2\cos^2(3x) - 1$), chcemy mieć same *cosinusy*) i otrzymujemy:

$$2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) = 0$$

Wyciągamy $\cos(3x)$ przed nawias i mamy:

$$\cos(3x)(2\cos(3x) - 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

Podwojony kąt - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(6x) - 3\cos(3x) + 1 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 6x = 2\cos^2(3x) - 1$), chcemy mieć same *cosinusy*) i otrzymujemy:

$$2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) = 0$$

Wyciągamy $\cos(3x)$ przed nawias i mamy:

$$\cos(3x)(2\cos(3x) - 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podwojony kąt - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos(6x) - 3\cos(3x) + 1 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 6x = 2\cos^2(3x) - 1$), chcemy mieć same *cosinusy*) i otrzymujemy:

$$2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) = 0$$

Wyciągamy $\cos(3x)$ przed nawias i mamy:

$$\cos(3x)(2\cos(3x) - 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

czyli:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podwojony kąt - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\cos 4x + 4\sin 2x + 5 = 0$$

Podwojony kąt - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\cos 4x + 4\sin 2x + 5 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$), chcemy mieć same *sinusy*) i otrzymujemy:

Podwojony kąt - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\cos 4x + 4\sin 2x + 5 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$), chcemy mieć same *sinusy*) i otrzymujemy:

$$-2\sin^2 2x + 4\sin 2x + 6 = 0$$

Dzielimy przez -2 i rozkładamy na dwa nawiasy:

Podwojony kąt - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\cos 4x + 4\sin 2x + 5 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$), chcemy mieć same *sinusy*) i otrzymujemy:

$$-2\sin^2 2x + 4\sin 2x + 6 = 0$$

Dzielimy przez -2 i rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(\sin 2x + 1)(\sin 2x - 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

Podwojony kąt - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\cos 4x + 4\sin 2x + 5 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$), chcemy mieć same *sinusy*) i otrzymujemy:

$$-2\sin^2 2x + 4\sin 2x + 6 = 0$$

Dzielimy przez -2 i rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(\sin 2x + 1)(\sin 2x - 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podwojony kąt - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\cos 4x + 4\sin 2x + 5 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na podwojony kąt ($\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$), chcemy mieć same *sinusy*) i otrzymujemy:

$$-2\sin^2 2x + 4\sin 2x + 6 = 0$$

Dzielimy przez -2 i rozkładamy na dwa nawiasy:

$$(\sin 2x + 1)(\sin 2x - 3) = 0$$

i rozwiązujemy. Otrzymujemy:

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

czyli:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podwojony kąt - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$$

Podwojony kąt - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$$

Rozwiązanie:

Podwojony kąt - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Podwojony kąt - ćwiczenia

- Równanie:
$$\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$$
Rozwiązanie:
$$x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:
$$\cos 4x + 2\sin 2x\cos 2x + 1 = 0$$

Podwojony kąt - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos 4x + 2\sin 2x \cos 2x + 1 = 0$$

Rozwiązanie:

Podwojony kąt - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\cos 4x + 2\sin 2x \cos 2x + 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - wprowadzenie

Mamy do dyspozycji następujące wzory:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - wprowadzenie

Mamy do dyspozycji następujące wzory:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Wzory te możemy wykorzystać, by np. obliczyć $\sin(\frac{7\pi}{12})$ czy $\cos 15^\circ$:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - wprowadzenie

Mamy do dyspozycji następujące wzory:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Wzory te możemy wykorzystać, by np. obliczyć $\sin(\frac{7\pi}{12})$ czy $\cos 15^\circ$:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - wprowadzenie

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - wprowadzenie

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Wyszło to samo. To oczywiście nie jest przypadek. $\frac{7\pi}{12} = 105^\circ$, czyli $\sin 105^\circ = \sin(180 - 75^\circ) = \sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - wprowadzenie

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Wyszło to samo. To oczywiście nie jest przypadek. $\frac{7\pi}{12} = 105^\circ$, czyli $\sin 105^\circ = \sin(180 - 75^\circ) = \sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$.

Przy rozwiązywaniu równań będziemy jednak przeważnie stosowali powyższe wzory w przeciwnym kierunku (czyli od prawej do lewej).

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

Naszym celem jest przekształcenie lewej strony tego równania, by wyglądała jak prawa strona wzorów na *sinus/cosinus* sumy lub różnicy kątów.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

Naszym celem jest przekształcenie lewej strony tego równania, by wyglądała jak prawa strona wzorów na *sinus/cosinus* sumy lub różnicy kątów. Dzielimy obie strony przez 2 i otrzymujemy:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

Naszym celem jest przekształcenie lewej strony tego równania, by wyglądała jak prawa strona wzorów na *sinus/cosinus* sumy lub różnicy kątów. Dzielimy obie strony przez 2 i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

Naszym celem jest przekształcenie lewej strony tego równania, by wyglądała jak prawa strona wzorów na *sinus/cosinus* sumy lub różnicy kątów. Dzielimy obie strony przez 2 i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz zamieniamy $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$ i mamy:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

Naszym celem jest przekształcenie lewej strony tego równania, by wyglądała jak prawa strona wzorów na *sinus/cosinus* sumy lub różnicy kątów. Dzielimy obie strony przez 2 i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz zamieniamy $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$ i mamy:

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

Naszym celem jest przekształcenie lewej strony tego równania, by wyglądała jak prawa strona wzorów na *sinus/cosinus* sumy lub różnicy kątów. Dzielimy obie strony przez 2 i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz zamieniamy $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$ i mamy:

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz możemy zastosować wzór na *cosinus* różnicy kątów i otrzymujemy:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Zanim dokończymy to, już proste, zadanie. Omówmy kilka możliwych wątpliwości.

- Dlaczego podzieliliśmy akurat przez 2?

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Zanim dokończymy to, już proste, zadanie. Omówmy kilka możliwych wątpliwości.

- Dlaczego podzieliliśmy akurat przez 2? Chcemy, żeby powstały liczby, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta. $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ spełniają ten warunek.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Zanim dokończymy to, już proste, zadanie. Omówmy kilka możliwych wątpliwości.

- Dlaczego podzieliliśmy akurat przez 2? Chcemy, żeby powstały liczby, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta. $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ spełniają ten warunek.
- Dlaczego zamieniłem $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$? A nie na przykład: $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$?

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Zanim dokończymy to, już proste, zadanie. Omówmy kilka możliwych wątpliwości.

- Dlaczego podzieliliśmy akurat przez 2? Chcemy, żeby powstały liczby, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta. $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ spełniają ten warunek.
- Dlaczego zamieniłem $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$? A nie na przykład: $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$? Nie miało to znaczenia, mogliśmy zrobić i tak i tak.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Zanim dokończymy to, już proste, zadanie. Omówmy kilka możliwych wątpliwości.

- Dlaczego podzieliliśmy akurat przez 2? Chcemy, żeby powstały liczby, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta. $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ spełniają ten warunek.
- Dlaczego zamieniłem $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$? A nie na przykład: $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$? Nie miało to znaczenia, mogliśmy zrobić i tak i tak. Zrobimy ten drugi sposób na kolejnym slajdzie.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Zanim dokończymy to, już proste, zadanie. Omówmy kilka możliwych wątpliwości.

- Dlaczego podzieliliśmy akurat przez 2? Chcemy, żeby powstały liczby, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta. $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ spełniają ten warunek.
- Dlaczego zamieniłem $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$? A nie na przykład: $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$? Nie miało to znaczenia, mogliśmy zrobić i tak i tak. Zrobimy ten drugi sposób na kolejnym slajdzie.
- Dlaczego na końcu otrzymaliśmy $\cos(x - \frac{\pi}{6})$, a nie $\cos(\frac{\pi}{6} - x)$?

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Zanim dokończymy to, już proste, zadanie. Omówmy kilka możliwych wątpliwości.

- Dlaczego podzieliliśmy akurat przez 2? Chcemy, żeby powstały liczby, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta. $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ spełniają ten warunek.
- Dlaczego zamieniłem $\frac{1}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{6}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{6}$? A nie na przykład: $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$? Nie miało to znaczenia, mogliśmy zrobić i tak i tak. Zrobimy ten drugi sposób na kolejnym slajdzie.
- Dlaczego na końcu otrzymaliśmy $\cos(x - \frac{\pi}{6})$, a nie $\cos(\frac{\pi}{6} - x)$? Bardzo ważne pytanie i musicie to doskonale rozumieć! Przecież $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, czyli $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$, to jest to samo.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Jesteśmy przy:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Jesteśmy przy:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz to już prosto:

$$x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Jesteśmy przy:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz to już prosto:

$$x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Czyli naszą odpowiedzią jest:

$$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Teraz wróćmy do momentu:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I zamieńmy $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$, otrzymamy:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Teraz wróćmy do momentu:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I zamieńmy $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$, otrzymamy:

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Teraz wróćmy do momentu:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I zamieńmy $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$, otrzymamy:

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz mamy wzór na *sinus* sumy kątów, czyli otrzymujemy:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Teraz wróćmy do momentu:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I zamieńmy $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$, otrzymamy:

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz mamy wzór na *sinus* sumy kątów, czyli otrzymujemy:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy:

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 1

Teraz wróćmy do momentu:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I zamieńmy $\frac{1}{2}$ na $\cos\frac{\pi}{3}$, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\sin\frac{\pi}{3}$, otrzymamy:

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teraz mamy wzór na *sinus* sumy kątów, czyli otrzymujemy:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy:

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

To po wyznaczeniu x daje oczywiście dokładnie to samo rozwiązanie, co poprzednio.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

Przez co warto pomnożyć obie strony?

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

Przez co warto pomnożyć obie strony? Oczywiście przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$, wtedy po lewej stronie otrzymamy $\cos\frac{\pi}{4}$ oraz $\sin\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$$

czyli:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

Przez co warto pomnożyć obie strony? Oczywiście przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$, wtedy po lewej stronie otrzymamy $\cos\frac{\pi}{4}$ oraz $\sin\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$$

czyli:

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 1$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

Przez co warto pomnożyć obie strony? Oczywiście przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$, wtedy po lewej stronie otrzymamy $\cos\frac{\pi}{4}$ oraz $\sin\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$$

czyli:

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 1$$

Stosujemy wzór na *sinus* różnicy kątów i otrzymujemy:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

co daje:

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 2

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

co daje:

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Czyli nasze ostateczne rozwiązanie to:

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

Przez co warto pomnożyć obie strony?

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

Przez co warto pomnożyć obie strony? Oczywiście przez $\frac{1}{2}$, wtedy po lewej stronie otrzymamy np. $\cos\frac{\pi}{6}$ oraz $\sin\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

czyli:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

Przez co warto pomnożyć obie strony? Oczywiście przez $\frac{1}{2}$, wtedy po lewej stronie otrzymamy np. $\cos\frac{\pi}{6}$ oraz $\sin\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

czyli:

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

Przez co warto pomnożyć obie strony? Oczywiście przez $\frac{1}{2}$, wtedy po lewej stronie otrzymamy np. $\cos\frac{\pi}{6}$ oraz $\sin\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

czyli:

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2}$$

Stosujemy wzór na *sinus* sumy kątów i otrzymujemy:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

co daje:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 3

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

co daje:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Czyli nasze ostateczne rozwiązanie to:

$$x = 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

To, że zamiast x mamy $3x$ nic nie zmienia, ważne, że w obu miejscach jest ten sam kąt.

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

To, że zamiast x mamy $3x$ nic nie zmienia, ważne, że w obu miejscach jest ten sam kąt. Mnożymy oczywiście przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = -\frac{\sqrt{12}}{4}$$

czyli:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

To, że zamiast x mamy $3x$ nic nie zmienia, ważne, że w obu miejscach jest ten sam kąt. Mnożymy oczywiście przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = -\frac{\sqrt{12}}{4}$$

czyli:

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin 3x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

To, że zamiast x mamy $3x$ nic nie zmienia, ważne, że w obu miejscach jest ten sam kąt. Mnożymy oczywiście przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = -\frac{\sqrt{12}}{4}$$

czyli:

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin 3x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Stosujemy wzór na *sinus* sumy kątów i otrzymujemy:

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Otrzymujemy

$$3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Otrzymujemy

$$3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Czyli nasze ostateczne rozwiązanie to:

$$x = -\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - przykład 4

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Równanie:

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1$$

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1$$

  Rozwiązanie:

Wzór na *sinus/cosinus* sumy i różnicy kątów - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Teraz przejdziemy do najbardziej zaawansowanych przykładów z wykorzystaniem wzorów na sumę i różnicę *sinusów/cosinusów*

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - wprowadzenie

Wzory, które warto znać.

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - wprowadzenie

Wzory, które warto znać. Ja sam nie znam ich na pamięć, ale kojarzę je na tyle dobrze, że potrafię zauważyć, kiedy można je zastosować - i to jest najważniejsze.

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - wprowadzenie

Wzory, które warto znać. Ja sam nie znam ich na pamięć, ale kojarzę je na tyle dobrze, że potrafię zauważyć, kiedy można je zastosować - i to jest najważniejsze.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha=\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

Stosujemy oczywiście wzór na sumę *sinusów*:

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

czyli:

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

Stosujemy oczywiście wzór na sumę *sinusów*:

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

czyli:

$$\frac{3x}{2} = k\pi \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

Stosujemy oczywiście wzór na sumę *sinusów*:

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

czyli:

$$\frac{3x}{2} = k\pi \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ostatecznie:

$$x = \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

Stosujemy oczywiście wzór na sumę *sinusów*:

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

czyli:

$$\frac{3x}{2} = k\pi \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ostatecznie:

$$x = \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

To samo równanie rozwiązaliśmy wcześniej (korzystając ze wzoru $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$).

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

Stosujemy oczywiście wzór na sumę *sinusów*:

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

czyli:

$$\frac{3x}{2} = k\pi \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ostatecznie:

$$x = \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

To samo równanie rozwiązaliśmy wcześniej (korzystając ze wzoru $\sin 2x = 2\sin x\cos x$). Porównajcie nasze rozwiązania.

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

Stosujemy oczywiście wzór na sumę *sinusów*:

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

czyli:

$$\frac{3x}{2} = k\pi \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ostatecznie:

$$x = \frac{2k\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = \pi + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

To samo równanie rozwiązaliśmy wcześniej (korzystając ze wzoru $\sin 2x = 2\sin x\cos x$). Porównajcie nasze rozwiązania. Na pierwszy rzut oka wyglądają inaczej, ale po chwili zastanowienia zobaczycie, że wyszło oczywiście to samo.

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$.

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$. Czemu?

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$. Czemu? Bo wtedy pojawi nam się $2\cos 2x \cos(-x)$ i $\cos 2x$ będziemy mogli wyciągnąć przed nawias:

$$2\cos 2x \cos(-x) + \cos 2x = 0$$

wyciągamy $\cos 2x$ przed nawias (i przy okazji zamieniamy $\cos(-x)$ na $\cos x$):

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$. Czemu? Bo wtedy pojawi nam się $2\cos 2x \cos(-x)$ i $\cos 2x$ będziemy mogli wyciągnąć przed nawias:

$$2\cos 2x \cos(-x) + \cos 2x = 0$$

wyciągamy $\cos 2x$ przed nawias (i przy okazji zamieniamy $\cos(-x)$ na $\cos x$):

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$. Czemu? Bo wtedy pojawi nam się $2\cos 2x \cos(-x)$ i $\cos 2x$ będziemy mogli wyciągnąć przed nawias:

$$2\cos 2x \cos(-x) + \cos 2x = 0$$

wyciągamy $\cos 2x$ przed nawias (i przy okazji zamieniamy $\cos(-x)$ na $\cos x$):

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

To daje:

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$. Czemu? Bo wtedy pojawi nam się $2\cos 2x \cos(-x)$ i $\cos 2x$ będziemy mogli wyciągnąć przed nawias:

$$2\cos 2x \cos(-x) + \cos 2x = 0$$

wyciągamy $\cos 2x$ przed nawias (i przy okazji zamieniamy $\cos(-x)$ na $\cos x$):

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

To daje:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$. Czemu? Bo wtedy pojawi nam się $2\cos 2x \cos(-x)$ i $\cos 2x$ będziemy mogli wyciągnąć przed nawias:

$$2\cos 2x \cos(-x) + \cos 2x = 0$$

wyciągamy $\cos 2x$ przed nawias (i przy okazji zamieniamy $\cos(-x)$ na $\cos x$):

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

To daje:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ostatecznie:

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Stosujemy wzór na sumę *cosinusów* dla $\cos x + \cos 3x$. Czemu? Bo wtedy pojawi nam się $2\cos 2x \cos(-x)$ i $\cos 2x$ będziemy mogli wyciągnąć przed nawias:

$$2\cos 2x \cos(-x) + \cos 2x = 0$$

wyciągamy $\cos 2x$ przed nawias (i przy okazji zamieniamy $\cos(-x)$ na $\cos x$):

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

To daje:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ostatecznie:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

Tutaj na początku możemy mieć problem - nie ma przecież wzoru na różnicę *sinusa* i *cosinusa*,

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

Tutaj na początku możemy mieć problem - nie ma przecież wzoru na różnicę *sinusa* i *cosinusa*, ale sprawa jest tak naprawdę prosta. Musimy po prostu zamienić *cosinus* na *sinus* lub *vice versa*.

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

Tutaj na początku możemy mieć problem - nie ma przecież wzoru na różnicę *sinusa* i *cosinusa*, ale sprawa jest tak naprawdę prosta. Musimy po prostu zamienić *cosinus* na *sinus* lub *vice versa*. Mamy do dyspozycji super-ważne wzory redukcyjne: $\cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$.

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

Tutaj na początku możemy mieć problem - nie ma przecież wzoru na różnicę *sinusa* i *cosinusa*, ale sprawa jest tak naprawdę prosta. Musimy po prostu zamienić *cosinus* na *sinus* lub *vice versa*. Mamy do dyspozycji super-ważne wzory redukcyjne: $\cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$. Skorzystamy z tego:

$$\sin 2x - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = 0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

Tutaj na początku możemy mieć problem - nie ma przecież wzoru na różnicę *sinusa* i *cosinusa*, ale sprawa jest tak naprawdę prosta. Musimy po prostu zamienić *cosinus* na *sinus* lub *vice versa*. Mamy do dyspozycji super-ważne wzory redukcyjne: $\cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$. Skorzystamy z tego:

$$\sin 2x - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = 0$$

Teraz oczywiście wzór na różnicę *sinusów*:

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

Tutaj na początku możemy mieć problem - nie ma przecież wzoru na różnicę *sinusa* i *cosinusa*, ale sprawa jest tak naprawdę prosta. Musimy po prostu zamienić *cosinus* na *sinus* lub *vice versa*. Mamy do dyspozycji super-ważne wzory redukcyjne: $\cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$. Skorzystamy z tego:

$$\sin 2x - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = 0$$

Teraz oczywiście wzór na różnicę *sinusów*:

$$2\sin\left(\frac{2x - (\frac{\pi}{2} - 3x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x + (\frac{\pi}{2} - 3x)}{2}\right) = 0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

$$2\sin\left(\frac{2x-(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)=0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

$$2\sin\left(\frac{2x-(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)=0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

$$2\sin\left(\frac{2x-(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)=0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

$$2\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

$$2\sin\left(\frac{2x - (\frac{\pi}{2} - 3x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x + (\frac{\pi}{2} - 3x)}{2}\right) = 0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

$$2\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

To daje:

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

$$2\sin\left(\frac{2x - (\frac{\pi}{2} - 3x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x + (\frac{\pi}{2} - 3x)}{2}\right) = 0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

$$2\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

To daje:

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi \qquad \text{lub} \qquad -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - przykład 3

$$2\sin\left(\frac{2x-(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+(\frac{\pi}{2}-3x)}{2}\right)=0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

$$2\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

To daje:

$$\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi \qquad \text{lub} \qquad -\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad \text{gdzie } k\in\mathbb{Z}$$

Ostatecznie:

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} \qquad \text{lub} \qquad x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \text{gdzie } k\in\mathbb{Z}$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x = \sin 3x$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x = \sin 3x$$

Rozwiązanie:

$$x = k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x = \sin 3x$$

  Rozwiązanie:

$$x = k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x$$

Wzory sumę i różnicę *sinusów/cosinusów* - ćwiczenia

- Równanie:

$$\sin x = \sin 3x$$

Rozwiązanie:

$$x = k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Równanie:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x$$

Rozwiązanie:

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Bardziej skomplikowane przykłady

Na kolejnych slajdach omówimy kilka bardziej złożonych przykładów.

Bardziej skomplikowane przykłady

Na kolejnych slajdach omówimy kilka bardziej złożonych przykładów. Przeważnie będziemy musieli zastosować kilka różnych metod opisanych wcześniej.

Różne przykłady - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$$

Pierwsza obserwacja dotyczy lewej strony równania. Możemy ją zapisać jako $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$,

Różne przykłady - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$$

Pierwsza obserwacja dotyczy lewej strony równania. Możemy ją zapisać jako $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, a w nawiasie mamy oczywiście jedynkę trygonometryczną.

Różne przykłady - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$$

Pierwsza obserwacja dotyczy lewej strony równania. Możemy ją zapisać jako $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, a w nawiasie mamy oczywiście jedynkę trygonometryczną. Czyli otrzymujemy:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$$

Pierwsza obserwacja dotyczy lewej strony równania. Możemy ją zapisać jako $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, a w nawiasie mamy oczywiście jedynkę trygonometryczną. Czyli otrzymujemy:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Dalej mamy dwie drugi do wyboru. Albo dążymy do tego, by wszystkie kąty były równe $2x$ albo, żeby wszystkie były równe x.

Różne przykłady - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$$

Pierwsza obserwacja dotyczy lewej strony równania. Możemy ją zapisać jako $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, a w nawiasie mamy oczywiście jedynkę trygonometryczną. Czyli otrzymujemy:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Dalej mamy dwie drugi do wyboru. Albo dążymy do tego, by wszystkie kąty były równe $2x$ albo, żeby wszystkie były równe x. Przeanalizujemy obie drogi.

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Zamieniamy kąty na $2x$. Pamiętamy, że $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, czyli $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$.

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Zamieniamy kąty na $2x$. Pamiętamy, że $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, czyli $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$. Warto więc pomnożyć nasze równanie przez 2:

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Zamieniamy kąty na $2x$. Pamiętamy, że $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, czyli $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$. Warto więc pomnożyć nasze równanie przez 2:

$$2 - 4\sin^2 x \cos^2 x = 2\cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Zamieniamy kąty na $2x$. Pamiętamy, że $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, czyli $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$. Warto więc pomnożyć nasze równanie przez 2:

$$2 - 4\sin^2 x \cos^2 x = 2\cos 2x$$

Czyli:

$$2 - \sin^2 2x = 2\cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Zamieniamy kąty na $2x$. Pamiętamy, że $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, czyli $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$. Warto więc pomnożyć nasze równanie przez 2:

$$2 - 4\sin^2 x \cos^2 x = 2\cos 2x$$

Czyli:

$$2 - \sin^2 2x = 2\cos 2x$$

Teraz skorzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamienimy $-\sin^2 2x$ na $\cos^2 2x - 1$,

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Zamieniamy kąty na $2x$. Pamiętamy, że $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, czyli $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$. Warto więc pomnożyć nasze równanie przez 2:

$$2 - 4\sin^2 x \cos^2 x = 2\cos 2x$$

Czyli:

$$2 - \sin^2 2x = 2\cos 2x$$

Teraz skorzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamienimy $-\sin^2 2x$ na $\cos^2 2x - 1$,otrzymujemy (po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę):

$$\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1 = 0$$

Różne przykłady - przykład 1

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Zamieniamy kąty na $2x$. Pamiętamy, że $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, czyli $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$. Warto więc pomnożyć nasze równanie przez 2:

$$2 - 4\sin^2 x \cos^2 x = 2\cos 2x$$

Czyli:

$$2 - \sin^2 2x = 2\cos 2x$$

Teraz skorzystamy z jedynki trygonometrycznej i zamienimy $-\sin^2 2x$ na $\cos^2 2x - 1$,otrzymujemy (po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę):

$$\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1 = 0$$

To wzór skróconego mnożenia:

$$(\cos 2x - 1)^2 = 0$$

Różne przykłady - przykład 1

$$(\cos 2x - 1)^2 = 0$$

Różne przykłady - przykład 1

$$(\cos 2x - 1)^2 = 0$$

czyli $\cos 2x = 1$, co daje:

$$2x = 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 1

$$(\cos 2x - 1)^2 = 0$$

czyli $\cos 2x = 1$, co daje:

$$2x = 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

czyli:

$$x = k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 1

Wróćmy do:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 1

Wróćmy do:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Tym razem zamienimy kąty na x. Mamy do dyspozycji trzy wzory na $\cos 2x$, skorzystamy z $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, gdyż wtedy skrócą się jedynki.

Różne przykłady - przykład 1

Wróćmy do:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Tym razem zamienimy kąty na x. Mamy do dyspozycji trzy wzory na $\cos 2x$, skorzystamy z $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, gdyż wtedy skrócą się jedynki. Po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę otrzymamy:

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

Różne przykłady - przykład 1

Wróćmy do:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Tym razem zamienimy kąty na x. Mamy do dyspozycji trzy wzory na $\cos 2x$, skorzystamy z $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, gdyż wtedy skrócą się jedynki. Po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę otrzymamy:

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $2\sin^2 x$ przed nawias:

$$2\sin^2 x(1 - \cos^2 x) = 0$$

Różne przykłady - przykład 1

Wróćmy do:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Tym razem zamienimy kąty na x. Mamy do dyspozycji trzy wzory na $\cos 2x$, skorzystamy z $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, gdyż wtedy skrócą się jedynki. Po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę otrzymamy:

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $2\sin^2 x$ przed nawias:

$$2\sin^2 x(1 - \cos^2 x) = 0$$

czyli albo $\sin x = 0$ lub $\cos x = \pm 1$,

Różne przykłady - przykład 1

Wróćmy do:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x$$

Tym razem zamienimy kąty na x. Mamy do dyspozycji trzy wzory na $\cos 2x$, skorzystamy z $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, gdyż wtedy skrócą się jedynki. Po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę otrzymamy:

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $2\sin^2 x$ przed nawias:

$$2\sin^2 x(1 - \cos^2 x) = 0$$

czyli albo $\sin x = 0$ lub $\cos x = \pm 1$, obie te możliwości dają rozwiązanie:

$$x = k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Mamy tu trzy różne kąty: $x, 2x$ i $3x$. Pozbądźmy się najpierw $3x$.

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Mamy tu trzy różne kąty: $x, 2x$ i $3x$. Pozbądźmy się najpierw $3x$. Możemy to zrobić zapisując $\sin 3x$ jako $\sin(x + 2x)$ i korzystając ze wzoru na *sinus* sumy kątów:

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Mamy tu trzy różne kąty: $x, 2x$ i $3x$. Pozbądźmy się najpierw $3x$. Możemy to zrobić zapisując $\sin 3x$ jako $\sin(x + 2x)$ i korzystając ze wzoru na *sinus* sumy kątów:

$$\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Mamy tu trzy różne kąty: $x, 2x$ i $3x$. Pozbądźmy się najpierw $3x$. Możemy to zrobić zapisując $\sin 3x$ jako $\sin(x + 2x)$ i korzystając ze wzoru na *sinus* sumy kątów:

$$\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Mamy tu trzy różne kąty: $x, 2x$ i $3x$. Pozbądźmy się najpierw $3x$. Możemy to zrobić zapisując $\sin 3x$ jako $\sin(x + 2x)$ i korzystając ze wzoru na *sinus* sumy kątów:

$$\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

Pierwsze dwa wyrażenia dają $\sin(2x - x)$, czyli $\sin x$.

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Mamy tu trzy różne kąty: $x, 2x$ i $3x$. Pozbądźmy się najpierw $3x$. Możemy to zrobić zapisując $\sin 3x$ jako $\sin(x + 2x)$ i korzystając ze wzoru na *sinus* sumy kątów:

$$\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

Pierwsze dwa wyrażenia dają $\sin(2x - x)$, czyli $\sin x$. $\cos 2x$ zamieniamy na $1 - 2\sin^2 x$, by mieć same *sinusy* (a przy okazji jedynka się skraca).

Różne przykłady - przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Mamy tu trzy różne kąty: $x, 2x$ i $3x$. Pozbądźmy się najpierw $3x$. Możemy to zrobić zapisując $\sin 3x$ jako $\sin(x + 2x)$ i korzystając ze wzoru na *sinus* sumy kątów:

$$\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

Pierwsze dwa wyrażenia dają $\sin(2x - x)$, czyli $\sin x$. $\cos 2x$ zamieniamy na $1 - 2\sin^2 x$, by mieć same *sinusy* (a przy okazji jedynka się skraca). Otrzymujemy:

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

Różne przykłady - przykład 2

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

Różne przykłady - przykład 2

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawiast i mamy:

$$\sin x(1 - 2\sin x) = 0$$

Różne przykłady - przykład 2

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawiast i mamy:

$$\sin x(1 - 2\sin x) = 0$$

co ostatecznie daje nam następujące rozwiązania:

$$x = k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

Wyciągamy przed nawias $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

Wyciągamy przed nawias $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Teraz bardzo ważna obserwacja.

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

Wyciągamy przed nawias $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Teraz bardzo ważna obserwacja. $\sin^2 x \geqslant 0$ (wiadomo, podnosimy do kwadratu, więc nie może być ujemne),

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

Wyciągamy przed nawias $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Teraz bardzo ważna obserwacja. $\sin^2 x \geqslant 0$ (wiadomo, podnosimy do kwadratu, więc nie może być ujemne), ale $\sin x - 1 \leqslant 0$, bo *sinus* nie może być większy od 1.

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

Wyciągamy przed nawias $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Teraz bardzo ważna obserwacja. $\sin^2 x \geqslant 0$ (wiadomo, podnosimy do kwadratu, więc nie może być ujemne), ale $\sin x - 1 \leqslant 0$, bo *sinus* nie może być większy od 1. Podobnie $\cos^2 x \geqslant 0$ oraz $\cos x - 1 \leqslant 0$.

Różne przykłady - przykład 3

Rozwiąż równanie:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Zaczniemy nietypowo, zamienimy 1 na $\sin^2 x + \cos^2 x$ i przeniesiemy wszystko na lewą stronę

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

Wyciągamy przed nawias $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Teraz bardzo ważna obserwacja. $\sin^2 x \geqslant 0$ (wiadomo, podnosimy do kwadratu, więc nie może być ujemne), ale $\sin x - 1 \leqslant 0$, bo *sinus* nie może być większy od 1. Podobnie $\cos^2 x \geqslant 0$ oraz $\cos x - 1 \leqslant 0$.

Czyli $\sin^2 x(\sin x - 1) \leqslant 0$ oraz $\cos^2 x(\cos x - 1) \leqslant 0$

Różne przykłady - przykład 3

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Oba składniki sumy są niedodatnie, ale dają w sumie 0, a więc oba muszą być równe 0, czyli

$$\sin^2 x(\sin x - 1) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Różne przykłady - przykład 3

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Oba składniki sumy są niedodatnie, ale dają w sumie 0, a więc oba muszą być równe 0, czyli

$$\sin^2 x(\sin x - 1) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

Rozwiązujemy i ostatecznie otrzymujemy:

$$x = 2k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$$

Różne przykłady - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$$

Wydaje się oczywiste, że musimy zastosować wzór na różnicę *sinusów/cosinusów*

Różne przykłady - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$$

Wydaje się oczywiste, że musimy zastosować wzór na różnicę *sinusów/cosinusów*

$$-2\sin 2x \sin(-x) = 2\sin(-x)\cos 2x$$

Różne przykłady - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$$

Wydaje się oczywiste, że musimy zastosować wzór na różnicę *sinusów/cosinusów*

$$-2\sin 2x \sin(-x) = 2\sin(-x)\cos 2x$$

Sinus jest funkcją nieparzystą, to znaczy $\sin(-x) = -\sin x$, wykorzystajmy to, a także przenieśmy wszystko na lewą stronę:

Różne przykłady - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$$

Wydaje się oczywiste, że musimy zastosować wzór na różnicę *sinusów/cosinusów*

$$-2\sin 2x \sin(-x) = 2\sin(-x)\cos 2x$$

Sinus jest funkcją nieparzystą, to znaczy $\sin(-x) = -\sin x$, wykorzystajmy to, a także przenieśmy wszystko na lewą stronę:

$$2\sin 2x \sin x + 2\sin x \cos 2x = 0$$

Różne przykłady - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$$

Wydaje się oczywiste, że musimy zastosować wzór na różnicę *sinusów/cosinusów*

$$-2\sin 2x \sin(-x) = 2\sin(-x)\cos 2x$$

Sinus jest funkcją nieparzystą, to znaczy $\sin(-x) = -\sin x$, wykorzystajmy to, a także przenieśmy wszystko na lewą stronę:

$$2\sin 2x \sin x + 2\sin x \cos 2x = 0$$

Wyciągniemy teraz $2\sin x$ przed nawias:

Różne przykłady - przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$$

Wydaje się oczywiste, że musimy zastosować wzór na różnicę *sinusów/cosinusów*

$$-2\sin 2x \sin(-x) = 2\sin(-x)\cos 2x$$

Sinus jest funkcją nieparzystą, to znaczy $\sin(-x) = -\sin x$, wykorzystajmy to, a także przenieśmy wszystko na lewą stronę:

$$2\sin 2x \sin x + 2\sin x \cos 2x = 0$$

Wyciągniemy teraz $2\sin x$ przed nawias:

$$2\sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

Różne przykłady - przykład 4

$$2\sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

Różne przykłady - przykład 4

$$2\sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

Czyli $\sin x = 0$ lub $\sin 2x = -\cos 2x$.

Różne przykłady - przykład 4

$$2\sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

Czyli $\sin x = 0$ lub $\sin 2x = -\cos 2x$. Z tego drugiego równania otrzymujemy $\operatorname{tg} 2x = -1$.

Różne przykłady - przykład 4

$$2 \sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

Czyli $\sin x = 0$ lub $\sin 2x = -\cos 2x$. Z tego drugiego równania otrzymujemy $\operatorname{tg} 2x = -1$. Rozwiązujemy i mamy:

$$x = k\pi \qquad \text{lub} \qquad 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 4

$$2\sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

Czyli $\sin x = 0$ lub $\sin 2x = -\cos 2x$. Z tego drugiego równania otrzymujemy $\operatorname{tg} 2x = -1$. Rozwiązujemy i mamy:

$$x = k\pi \qquad \text{lub} \qquad 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Czyli ostateczny wynik to:

$$x = k\pi \qquad \text{lub} \qquad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

Różne przykłady - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

Przeniesiemy wszystko na lewą stronę:

Różne przykłady - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

Przeniesiemy wszystko na lewą stronę:

$$\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 2x = 0$$

Różne przykłady - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

Przeniesiemy wszystko na lewą stronę:

$$\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 2x = 0$$

Zastosujemy wzór na różnicę kwadratów (w głowie mamy następującą myśl: "powstanie suma/różnica *sinusów*, zastosujemy wzór właśnie na sumę/różnicę i powinien się pojawić $\sin 2x$):

$$(\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) + \sin^2 2x = 0$$

Różne przykłady - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

Przeniesiemy wszystko na lewą stronę:

$$\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 2x = 0$$

Zastosujemy wzór na różnicę kwadratów (w głowie mamy następującą myśl: "powstanie suma/różnica *sinusów*, zastosujemy wzór właśnie na sumę/różnicę i powinien się pojawić $\sin 2x$):

$$(\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) + \sin^2 2x = 0$$

Zgodnie z planem stosujemy wzór na sumę/różnicę *sinusów*:

Różne przykłady - przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

Przeniesiemy wszystko na lewą stronę:

$$\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 2x = 0$$

Zastosujemy wzór na różnicę kwadratów (w głowie mamy następującą myśl: "powstanie suma/różnica *sinusów*, zastosujemy wzór właśnie na sumę/różnicę i powinien się pojawić $\sin 2x$):

$$(\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) + \sin^2 2x = 0$$

Zgodnie z planem stosujemy wzór na sumę/różnicę *sinusów*:

$$2\sin(-x)\cos 2x \cdot 2\sin 2x \cos x + \sin^2 2x = 0$$

Różne przykłady - przykład 5

$$2\sin(-x)\cos 2x \cdot 2\sin 2x\cos x + \sin^2 2x = 0$$

Różne przykłady - przykład 5

$$2\sin(-x)\cos 2x \cdot 2\sin 2x\cos x + \sin^2 2x = 0$$

Teraz mamy $\sin(-x) = -\sin x$ i dostajemy więcej niż byśmy chcieli:

$$-4\sin x\cos x\cos 2x\sin 2x + \sin^2 2x = 0$$

gdyż pojawiło się wyrażenie $\sin x\cos x$, które oczywiście kojarzymy ze wzoru $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, otrzymujemy:

Różne przykłady - przykład 5

$$2\sin(-x)\cos 2x \cdot 2\sin 2x\cos x + \sin^2 2x = 0$$

Teraz mamy $\sin(-x) = -\sin x$ i dostajemy więcej niż byśmy chcieli:

$$-4\sin x\cos x\cos 2x\sin 2x + \sin^2 2x = 0$$

gdyż pojawiło się wyrażenie $\sin x\cos x$, które oczywiście kojarzymy ze wzoru $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, otrzymujemy:

$$-2\cos 2x\sin^2 2x + \sin^2 2x = 0$$

Różne przykłady - przykład 5

$$2\sin(-x)\cos 2x \cdot 2\sin 2x\cos x + \sin^2 2x = 0$$

Teraz mamy $\sin(-x) = -\sin x$ i dostajemy więcej niż byśmy chcieli:

$$-4\sin x\cos x\cos 2x\sin 2x + \sin^2 2x = 0$$

gdyż pojawiło się wyrażenie $\sin x\cos x$, które oczywiście kojarzymy ze wzoru $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, otrzymujemy:

$$-2\cos 2x\sin^2 2x + \sin^2 2x = 0$$

Teraz już z górki, wyciągamy $\sin^2 2x$ przed nawias i mamy:

$$\sin^2 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

Różne przykłady - przykład 5

$$\sin^2 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

Różne przykłady - przykład 5

$$\sin^2 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

Otrzymujemy:

$$2x = k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 5

$$\sin^2 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

Otrzymujemy:

$$2x = k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Czyli ostateczny wynik to:

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1$$

Różne przykłady - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1$$

Mamy *cotangens*, więc musimy zacząc od

Różne przykłady - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1$$

Mamy *cotangens*, więc musimy zacząc od **dziedziny**!

Różne przykłady - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1$$

Mamy *cotangens*, więc musimy zacząc od **dziedziny**!

$$8x \neq k\pi \qquad \text{i} \qquad 10x \neq k\pi$$

czyli

Różne przykłady - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1$$

Mamy *cotangens*, więc musimy zacząc od **dziedziny**!

$$8x \neq k\pi \qquad \text{i} \qquad 10x \neq k\pi$$

czyli

$$x \neq \frac{k\pi}{8} \qquad \text{i} \qquad x \neq \frac{k\pi}{10}$$

Różne przykłady - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1$$

Mamy *cotangens*, więc musimy zacząc od **dziedziny**!

$$8x \neq k\pi \qquad \text{i} \qquad 10x \neq k\pi$$

czyli

$$x \neq \frac{k\pi}{8} \qquad \text{i} \qquad x \neq \frac{k\pi}{10}$$

Teraz zapiszmy wykorzystajmy fakt, że $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$:

Różne przykłady - przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1$$

Mamy *cotangens*, więc musimy zacząc od **dziedziny**!

$$8x \neq k\pi \qquad \text{i} \qquad 10x \neq k\pi$$

czyli

$$x \neq \frac{k\pi}{8} \qquad \text{i} \qquad x \neq \frac{k\pi}{10}$$

Teraz zapiszmy wykorzystajmy fakt, że $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$:

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Mnożymy przez mianownik i przenosimy wszysko na lewą stronę:

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Mnożymy przez mianownik i przenosimy wszysko na lewą stronę:

$$\cos 8x \cos 10x + \sin 8x \sin 10x = 0$$

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Mnożymy przez mianownik i przenosimy wszysko na lewą stronę:

$$\cos 8x \cos 10x + \sin 8x \sin 10x = 0$$

Po lewej stronie powstało coś, co powinno nam się kojarzyć ze wzorem na *cosinus* różnicy kątów.

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Mnożymy przez mianownik i przenosimy wszysko na lewą stronę:

$$\cos 8x \cos 10x + \sin 8x \sin 10x = 0$$

Po lewej stronie powstało coś, co powinno nam się kojarzyć ze wzorem na *cosinus* różnicy kątów. Otrzymujemy:

$$\cos 2x = 0$$

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Mnożymy przez mianownik i przenosimy wszysko na lewą stronę:

$$\cos 8x \cos 10x + \sin 8x \sin 10x = 0$$

Po lewej stronie powstało coś, co powinno nam się kojarzyć ze wzorem na *cosinus* różnicy kątów. Otrzymujemy:

$$\cos 2x = 0$$

Czyli

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Mnożymy przez mianownik i przenosimy wszysko na lewą stronę:

$$\cos 8x \cos 10x + \sin 8x \sin 10x = 0$$

Po lewej stronie powstało coś, co powinno nam się kojarzyć ze wzorem na *cosinus* różnicy kątów. Otrzymujemy:

$$\cos 2x = 0$$

Czyli

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ale uwaga! Te rozwiązania są poza dziedziną! Ostatecznie więc nasze równanie nie ma rozwiązań!

Różne przykłady - przykład 6

$$\frac{\cos 8x \cos 10x}{\sin 8x \sin 10x} = -1$$

Mnożymy przez mianownik i przenosimy wszysko na lewą stronę:

$$\cos 8x \cos 10x + \sin 8x \sin 10x = 0$$

Po lewej stronie powstało coś, co powinno nam się kojarzyć ze wzorem na *cosinus* różnicy kątów. Otrzymujemy:

$$\cos 2x = 0$$

Czyli

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ale uwaga! Te rozwiązania są poza dziedziną! Ostatecznie więc nasze równanie nie ma rozwiązań!

$$x \in \emptyset$$

Na kolejnych slajdach przyjrzymy się zadaniom z trygonometrii, które pojawiły się na maturach.

Zadania maturalne 1

Maj 2015,

Zadania maturalne 1

Maj 2015, proste zadanie testowe na początek:

Zadanie 4. (0–1)

Równanie $2\sin x + 3\cos x = 6$ w przedziale $(0, 2\pi)$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.

D. ma więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste.

Zadania maturalne 1

Maj 2015, proste zadanie testowe na początek:

Zadanie 4. (0–1)

Równanie $2\sin x + 3\cos x = 6$ w przedziale $(0, 2\pi)$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.

D. ma więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste.

To bardzo ważne zadanie, bo pokazuje, że czasem zanim zaczniemy coś rozwiązywać trzeba się chwilkę zastanowić.

Zadania maturalne 1

Maj 2015, proste zadanie testowe na początek:

Zadanie 4. (0–1)

Równanie $2\sin x + 3\cos x = 6$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.

D. ma więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste.

To bardzo ważne zadanie, bo pokazuje, że czasem zanim zaczniemy coś rozwiązywać trzeba się chwilkę zastanowić. $\sin x$ jest nie większy od 1, $\cos x$ również, więc po lewej stronie na pewno nie będziemy mieć nic większego od 5 (w rzeczywistości nawet mniej),

Zadania maturalne 1

Maj 2015, proste zadanie testowe na początek:

Zadanie 4. (0–1)

Równanie $2\sin x + 3\cos x = 6$ w przedziale $(0, 2\pi)$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.

D. ma więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste.

To bardzo ważne zadanie, bo pokazuje, że czasem zanim zaczniemy coś rozwiązywać trzeba się chwilkę zastanowić. $\sin x$ jest nie większy od 1, $\cos x$ również, więc po lewej stronie na pewno nie będziemy mieć nic większego od 5 (w rzeczywistości nawet mniej), więc równanie oczywiście nie będzie miało rozwiązań - odpowiedź A.

Zadania maturalne 2

Maj 2017,

Zadania maturalne 2

Maj 2017,

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadania maturalne 2

Maj 2017,

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\cos 2x$ zamienimy na $2\cos^2 x - 1$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt.

Zadania maturalne 2

Maj 2017,

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\cos 2x$ zamienimy na $2\cos^2 x - 1$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Zadania maturalne 2

Maj 2017,

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\cos 2x$ zamienimy na $2\cos^2 x - 1$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Rozkładamy na czynniki:

Maj 2017,

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\cos 2x$ zamienimy na $2\cos^2 x - 1$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Rozkładamy na czynniki:

$$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$$

Zadania maturalne 2

Maj 2017,

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\cos 2x$ zamienimy na $2\cos^2 x - 1$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Rozkładamy na czynniki:

$$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$$

Teraz już z górki. Pamiętajmy tylko, że szukamy rozwiązań w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadania maturalne 2

Maj 2017,

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\cos 2x$ zamienimy na $2\cos^2 x - 1$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Rozkładamy na czynniki:

$$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$$

Teraz już z górki. Pamiętajmy tylko, że szukamy rozwiązań w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Otrzymujemy:

$$x = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad x = \pi \qquad \text{lub} \qquad x = \frac{4\pi}{3}$$

Zadania maturalne 3

Maj 2018,

Zadania maturalne 3

Maj 2018,

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zadania maturalne 3

Maj 2018,

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

$\sin 6x$ zamienimy na $2\sin 3x \cos 3x$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt.

Zadania maturalne 3

Maj 2018,

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

$\sin 6x$ zamienimy na $2\sin 3x \cos 3x$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\sin 3x \cos 3x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$$

Zadania maturalne 3

Maj 2018,

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

$\sin 6x$ zamienimy na $2\sin 3x \cos 3x$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\sin 3x \cos 3x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$$

Wyciągamy $\cos 3x$ przed nawiast i przenosimy wszystko na lewą stronę :

Zadania maturalne 3

Maj 2018,

Zadanie 11. (0–4)
Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

$\sin 6x$ zamienimy na $2\sin 3x \cos 3x$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\sin 3x \cos 3x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$$

Wyciągamy $\cos 3x$ przed nawiast i przenosimy wszystko na lewą stronę :

$$\cos 3x(2\sin 3x + 1) - (2\sin 3x + 1) = 0$$

Maj 2018,

Zadanie 11. (0–4)
Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

$\sin 6x$ zamienimy na $2\sin 3x \cos 3x$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\sin 3x \cos 3x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$$

Wyciągamy $\cos 3x$ przed nawiast i przenosimy wszystko na lewą stronę :

$$\cos 3x(2\sin 3x + 1) - (2\sin 3x + 1) = 0$$

Oczywiście wyciągamy $(2\sin 3x + 1)$ przed nawiast:

Zadania maturalne 3

Maj 2018,

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

$\sin 6x$ zamienimy na $2\sin 3x \cos 3x$, żeby mieć wszędzie ten sam kąt. Otrzymujemy (po przeniesieniu na jedną stronę):

$$2\sin 3x \cos 3x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$$

Wyciągamy $\cos 3x$ przed nawiast i przenosimy wszystko na lewą stronę :

$$\cos 3x(2\sin 3x + 1) - (2\sin 3x + 1) = 0$$

Oczywiście wyciągamy $(2\sin 3x + 1)$ przed nawiast:

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Zadania maturalne 3

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Zadania maturalne 3

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Już jest prosto, ale trzeba uważać na to, że mamy $3x$ i przedział ograniczony do $\langle 0, \pi \rangle$.

Zadania maturalne 3

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Już jest prosto, ale trzeba uważać na to, że mamy $3x$ i przedział ograniczony do $\langle 0, \pi \rangle$. Warto podstawić $\alpha = 3x$ i wtedy $\alpha \in \langle 0, 3\pi \rangle$.

Zadania maturalne 3

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Już jest prosto, ale trzeba uważać na to, że mamy $3x$ i przedział ograniczony do $\langle 0, \pi \rangle$. Warto podstawić $\alpha = 3x$ i wtedy $\alpha \in \langle 0, 3\pi \rangle$. Mamy następujące rozwiązania dla α:

Zadania maturalne 3

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Już jest prosto, ale trzeba uważać na to, że mamy $3x$ i przedział ograniczony do $\langle 0, \pi \rangle$. Warto podstawić $\alpha = 3x$ i wtedy $\alpha \in \langle 0, 3\pi \rangle$. Mamy następujące rozwiązania dla α:

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{11\pi}{6} \quad \text{lub} \quad \alpha = 0 \quad \text{lub} \quad \alpha = 2\pi$$

Zadania maturalne 3

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Już jest prosto, ale trzeba uważać na to, że mamy $3x$ i przedział ograniczony do $\langle 0, \pi \rangle$. Warto podstawić $\alpha = 3x$ i wtedy $\alpha \in \langle 0, 3\pi \rangle$. Mamy następujące rozwiązania dla α:

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{11\pi}{6} \quad \text{lub} \quad \alpha = 0 \quad \text{lub} \quad \alpha = 2\pi$$

Wiemy, że skoro $\alpha = 3x$, to $x = \frac{\alpha}{3}$, czyli:

Zadania maturalne 3

$$(2\sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) = 0$$

Już jest prosto, ale trzeba uważać na to, że mamy $3x$ i przedział ograniczony do $\langle 0, \pi \rangle$. Warto podstawić $\alpha = 3x$ i wtedy $\alpha \in \langle 0, 3\pi \rangle$. Mamy następujące rozwiązania dla α:

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{11\pi}{6} \quad \text{lub} \quad \alpha = 0 \quad \text{lub} \quad \alpha = 2\pi$$

Wiemy, że skoro $\alpha = 3x$, to $x = \frac{\alpha}{3}$, czyli:

$$x = \frac{7\pi}{18} \quad \text{lub} \quad x = \frac{11\pi}{18} \quad \text{lub} \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

Zadania maturalne 4

Maj 2019,

Maj 2019,

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadania maturalne 4

Maj 2019,

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\cos^2 105° - \sin^2 105°$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Jeśli kojarzymy wzory, to od razu zauważymy tu wzór na $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, czyli otrzymujemy:

Zadania maturalne 4

Maj 2019,

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\cos^2 105° - \sin^2 105°$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Jeśli kojarzymy wzory, to od razu zauważymy tu wzór na $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, czyli otrzymujemy::

$$\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadania maturalne 4

Maj 2019,

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\cos^2 105° - \sin^2 105°$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Jeśli kojarzymy wzory, to od razu zauważymy tu wzór na $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, czyli otrzymujemy::

$$\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Odpowiedź A.

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Wygląda na skomplikowane, ale pierwszy krok jest oczywisty - sumujemy *sinusy* korzystając z odpowiedniego wzoru. Otrzymujemy:

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Wygląda na skomplikowane, ale pierwszy krok jest oczywisty - sumujemy *sinusy* korzystając z odpowiedniego wzoru. Otrzymujemy:

$$\cos x \cdot 2\sin x \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin x$$

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Wygląda na skomplikowane, ale pierwszy krok jest oczywisty - sumujemy *sinusy* korzystając z odpowiedniego wzoru. Otrzymujemy:

$$\cos x \cdot 2\sin x \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin x$$

I nagle zadanie staje się proste.

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Wygląda na skomplikowane, ale pierwszy krok jest oczywisty - sumujemy *sinusy* korzystając z odpowiedniego wzoru. Otrzymujemy:

$$\cos x \cdot 2\sin x \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin x$$

I nagle zadanie staje się proste. Oczywiście $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Wygląda na skomplikowane, ale pierwszy krok jest oczywisty - sumujemy *sinusy* korzystając z odpowiedniego wzoru. Otrzymujemy:

$$\cos x \cdot 2\sin x \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin x$$

I nagle zadanie staje się proste. Oczywiście $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Przenosimy wszystko na jedną stronę:

Zadania maturalne 5

Maj 2019,

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Wygląda na skomplikowane, ale pierwszy krok jest oczywisty - sumujemy *sinusy* korzystając z odpowiedniego wzoru. Otrzymujemy:

$$\cos x \cdot 2\sin x \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin x$$

I nagle zadanie staje się proste. Oczywiście $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Przenosimy wszystko na jedną stronę:

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

Zadania maturalne 5

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

Zadania maturalne 5

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawias i otrzymujemy:

Zadania maturalne 5

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawias i otrzymujemy:

$$\sin x (\cos x - \frac{1}{2}) = 0$$

Zadania maturalne 5

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawias i otrzymujemy:

$$\sin x(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$$

To nam daje:

Zadania maturalne 5

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

Oczywiście wyciągamy $\sin x$ przed nawias i otrzymujemy:

$$\sin x(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$$

To nam daje:

$$x = k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

To tyle jeśli chodzi o równania.

To tyle jeśli chodzi o równania. Na sprawdzian trzeba będzie umieć dodatkowo materiał z trygonometrii z pierwszej klasy i nierówności trygonometryczne.

To tyle jeśli chodzi o równania. Na sprawdzian trzeba będzie umieć dodatkowo materiał z trygonometrii z pierwszej klasy i nierówności trygonometryczne. Zrobimy jeszcze troszkę powtórzenia na początku roku.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.