Równania logarytmiczne

Na prezentacji omówione zostaną równania logarytmiczne - w szczególności zadania 1.138 - 1.144 ze zbioru.

Przypomnienie

Zanim zaczniemy rozwiązywać jakiekolwiek równanie, trzeba określić jego dziedzinę.

Zadanie 1.138

a) Mamy równanie $\log_2 x = \log_2(3 - x)$.

Zadanie 1.138

a) Mamy równanie $\log_2 x = \log_2(3 - x)$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $3 - x > 0$, co daje $x \in (-\infty, 3)$.

Zadanie 1.138

a) Mamy równanie $\log_2 x = \log_2(3 - x)$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $3 - x > 0$, co daje $x \in (-\infty, 3)$. Teraz możemy już rozwiązywać, równanie jest banalnie proste:

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \log_2(3 - x) \\ x &= 3 - x \\ 2x &= 3 \\ x &= 1.5 \end{aligned}$$

Zadanie 1.138

a) Mamy równanie $\log_2 x = \log_2(3 - x)$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $3 - x > 0$, co daje $x \in (-\infty, 3)$. Teraz możemy już rozwiązywać, równanie jest banalnie proste:

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \log_2(3 - x) \\ x &= 3 - x \\ 2x &= 3 \\ x &= 1.5 \end{aligned}$$

rozwiązanie należy do dziedziny, więc ostatecznie mamy $x = 1.5$.

Zadanie 1.138

e) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{5}}(1 - x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(x - 5)$.

Zadanie 1.138

e) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{5}}(1 - x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(x - 5)$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $1 - x^2 > 0$, co daje $x \in (-1, 1)$.

Zadanie 1.138

e) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{5}}(1-x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(x-5)$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $1 - x^2 > 0$, co daje $x \in (-1, 1)$.
Ponadto $x - 5 > 0$, co daje $x \in (5, \infty)$

Zadanie 1.138

e) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{5}}(1-x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(x-5)$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $1-x^2 > 0$, co daje $x \in (-1, 1)$. Ponadto $x-5 > 0$, co daje $x \in (5, \infty)$ Ostatecznie dziedziną równania jest zbiór pusty, więc nie ma potrzeby go rozwiązywać. Odpowiedzią jest $x \in \emptyset$.

Zadanie 1.139

d) Mamy równanie $\log_{\frac{2}{3}}(x + 2\frac{1}{2}) = -2$.

Zadanie 1.139

d) Mamy równanie $\log_{\frac{2}{3}}(x + 2\frac{1}{2}) = -2$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x + 2\frac{1}{2} > 0$, co daje $x \in (-2\frac{1}{2}, \infty)$.

Zadanie 1.139

d) Mamy równanie $\log_{\frac{2}{3}}(x + 2\frac{1}{2}) = -2$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x + 2\frac{1}{2} > 0$, co daje $x \in (-2\frac{1}{2}, \infty)$.
Przechodzimy do rozwiązania:

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(x + 2\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$x + 2\frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$x + 2\frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Zadanie 1.139

d) Mamy równanie $\log_{\frac{2}{3}}(x + 2\frac{1}{2}) = -2$.

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x + 2\frac{1}{2} > 0$, co daje $x \in (-2\frac{1}{2}, \infty)$. Przechodzimy do rozwiązania:

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(x + 2\frac{1}{2}\right) = -2$$
$$x + 2\frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$
$$x + 2\frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$
$$x = -\frac{1}{4}$$

rozwiązanie należy do dziedziny, więc ostatecznie mamy $x = -\frac{1}{4}$.

Zadanie 1.140

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) = -1$

Zadanie 1.140

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) = -1$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x^2+1>0$, czyli dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste: $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.140

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) = -1$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x^2 + 1 > 0$, czyli dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste: $x \in \mathbb{R}$. Przechodzimy do rozwiązania:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) = -1$$

$$x^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$x^2 + 1 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Zadanie 1.140

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) = -1$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x^2+1>0$, czyli dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste: $x \in \mathbb{R}$. Przechodzimy do rozwiązania:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) = -1$$
$$x^2+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$
$$x^2+1 = 2$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

oba rozwiązania należą do dziedziny, więc mamy $x = \in \{-1, 1\}$.

Zadanie 1.141

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}+3)=-2$

Zadanie 1.141

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x} + 3) = -2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $\frac{1}{x} + 3 > 0$, mnożymy przez x^2 i mamy $x + 3x^2 > 0$, co daje $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, \infty)$.

Zadanie 1.141

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}+3) = -2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $\frac{1}{x}+3>0$, mnożymy przez x^2 i mamy $x+3x^2>0$, co daje $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, \infty)$. Teraz rozwiązujemy:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}+3) = -2$$
$$\frac{1}{x}+3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
$$\frac{1}{x}+3 = 4$$
$$\frac{1}{x} = 1$$
$$x = 1$$

Zadanie 1.141

c) Mamy równanie $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}+3) = -2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $\frac{1}{x}+3>0$, mnożymy przez x^2 i mamy $x+3x^2>0$, co daje $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, \infty)$. Teraz rozwiązujemy:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}+3) = -2$$
$$\frac{1}{x}+3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
$$\frac{1}{x}+3 = 4$$
$$\frac{1}{x} = 1$$
$$x = 1$$

Rozwiązanie należy do dziedziny, czyli mamy $x = 1$.

Zadanie 1.142

d) Mamy równanie $\log_x 25 = -2$

Zadanie 1.142

d) Mamy równanie $\log_x 25 = -2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x > 0$ oraz $x \neq 1$.

Zadanie 1.142

d) Mamy równanie $\log_x 25 = -2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x > 0$ oraz $x \neq 1$. Teraz rozwiązujemy:

$$\log_x 25 = -2$$
$$25 = x^{-2}$$
$$25 = \frac{1}{x^2}$$
$$x^2 = \frac{1}{25}$$
$$x = \pm\frac{1}{5}$$

Zadanie 1.142

d) Mamy równanie $\log_x 25 = -2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x > 0$ oraz $x \neq 1$. Teraz rozwiązujemy:

$$\begin{aligned} \log_x 25 &= -2 \\ 25 &= x^{-2} \\ 25 &= \frac{1}{x^2} \\ x^2 &= \frac{1}{25} \\ x &= \pm\frac{1}{5} \end{aligned}$$

tylko dodatnie rozwiązanie należy do dziedziny, czyli mamy $x = \frac{1}{5}$.

Zadanie 1.143

d) Mamy równanie $\log_x(6x - 9) = 2$

Zadanie 1.143

d) Mamy równanie $\log_x(6x - 9) = 2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x > 0$ oraz $x \neq 1$, a także $6x - 9 > 0$, czyli $x > 1.5$, ostatecznie ten ostatni warunek wystarcza, czyli $x \in (1.5, \infty)$.

Zadanie 1.143

d) Mamy równanie $\log_x(6x-9)=2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x>0$ oraz $x\neq 1$, a także $6x-9>0$, czyli $x>1.5$, ostatecznie ten ostatni warunek wystarcza, czyli $x\in(1.5,\infty)$. Rozwiązujemy:

$$\begin{aligned}
&\log_x(6x-9)=2\\
&6x-9=x^2\\
&x^2-6x+9=0\\
&(x-3)^2=0\\
&x=3
\end{aligned}$$

Zadanie 1.143

d) Mamy równanie $\log_x(6x-9)=2$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x>0$ oraz $x\neq 1$, a także $6x-9>0$, czyli $x>1.5$, ostatecznie ten ostatni warunek wystarcza, czyli $x\in(1.5,\infty)$. Rozwiązujemy:

$$\log_x(6x-9)=2$$
$$6x-9=x^2$$
$$x^2-6x+9=0$$
$$(x-3)^2=0$$
$$x=3$$

rozwiązanie należy do dziedziny, czyli $x=3$.

Zadanie 1.144

e) Mamy równanie $\log_{x^2}(x+2) = 1$

Zadanie 1.144

e) Mamy równanie $\log_{x^2}(x+2) = 1$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x^2 > 0$, co daje $x \neq 0$ oraz $x^2 \neq 1$, co daje $x \neq \pm 1$, mamy jeszcze $x + 2 > 0$, czyli $x > -2$, ostatecznie $x \in (-2, \infty) - \{-1, 0, 1\}$.

Zadanie 1.144

e) Mamy równanie $\log_{x^2}(x+2)=1$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x^2>0$, co daje $x\neq 0$ oraz $x^2\neq 1$, co daje $x\neq \pm 1$, mamy jeszcze $x+2>0$, czyli $x>-2$, ostatecznie $x\in(-2,\infty)-\{-1,0,1\}$. Rozwiązujemy:

$$\begin{aligned}
&\log_{x^2}(x+2)=1\\
&x+2=x^2\\
&x^2-x-2=0\\
&(x-2)(x+1)=0\\
&x=2 \quad \vee \quad x=-1
\end{aligned}$$

Zadanie 1.144

e) Mamy równanie $\log_{x^2}(x+2) = 1$

Zaczynamy od określenia dziedziny. $x^2 > 0$, co daje $x \neq 0$ oraz $x^2 \neq 1$, co daje $x \neq \pm 1$, mamy jeszcze $x + 2 > 0$, czyli $x > -2$, ostatecznie $x \in (-2, \infty) - \{-1, 0, 1\}$. Rozwiązujemy:

$$\begin{aligned} &\log_{x^2}(x+2) = 1 \\ &x + 2 = x^2 \\ &x^2 - x - 2 = 0 \\ &(x-2)(x+1) = 0 \\ &x = 2 \quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

tylko pierwsze rozwiązanie należy do dziedziny, czyli $x = 2$.

Wejściówka

Na wejściówce będzie zadanie podobne do któregos z przykładów od 1.138 do 1.144. Warto przećwiczyć je jeszcze w domu.