Powtórzenie logarytmów

Na prezentacji przerobimy wybrane przykłady tematu powtórzeniowego z logarytmów z podręcznika/zbioru.

Na prezentacji przerobimy wybrane przykłady tematu powtórzeniowego z logarytmów z podręcznika/zbioru. Jest to materiał z 1. klasy.

Na prezentacji przerobimy wybrane przykłady tematu powtórzeniowego z logarytmów z podręcznika/zbioru. Jest to materiał z 1. klasy. Przerobimy wybrane podpunkty z zadań 1.95 - 1.100. W domu proszę zrobić pozostałe podpunky z tych zadań.

Przypomnienie

Logarytmy

$$log_a b = c \qquad \text{jest równoważne z} \qquad a^c = b$$

Przypomnienie

Logarytmy

$$log_a b = c \qquad \text{jest równoważne z} \qquad a^c = b$$

Ważne zasady dotyczące działań na logarytmach:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a (\frac{b}{c})$$

$$k \log_a b = \log_a b^k$$

Przypomnienie

Logarytmy

$log_a b = c$ jest równoważne z $a^c = b$

Ważne zasady dotyczące działań na logarytmach:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a(\frac{b}{c})$$

$$k \log_a b = \log_a b^k$$

Proste tożsamości wynikające wprost z definicji:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a^b = b$$

Przypomnienie

Dodatkowo mamy jeszcze wzór na zmianę podstawy logarytmu:

$$log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Zadanie 1.95

a) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{3}} 81$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{3}$, by otrzymać 81,

Zadanie 1.95

a) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{3}} 81$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{3}$, by otrzymać 81, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$$

Zadanie 1.95

a) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{3}} 81$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{3}$, by otrzymać 81, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$$

To daje:

$$3^{-x} = 3^4$$

Zadanie 1.95

a) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{3}} 81$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{3}$, by otrzymać 81, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$$

To daje:

$$3^{-x} = 3^4$$

czyli $x = -4$.

Zadanie 1.95

g) Chcemy obliczyć $\log_6 \frac{1}{216}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 6, by otrzymać $\frac{1}{216}$,

Zadanie 1.95

g) Chcemy obliczyć $\log_6 \frac{1}{216}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 6, by otrzymać $\frac{1}{216}$, czyli rozwiązujemy:

$$6^x = \frac{1}{216}$$

Zadanie 1.95

g) Chcemy obliczyć $\log_6 \frac{1}{216}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 6, by otrzymać $\frac{1}{216}$, czyli rozwiązujemy:

$$6^x = \frac{1}{216}$$

To daje:

$$6^x = 6^{-3}$$

Zadanie 1.95

g) Chcemy obliczyć $\log_6 \frac{1}{216}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 6, by otrzymać $\frac{1}{216}$, czyli rozwiązujemy:

$$6^x = \frac{1}{216}$$

To daje:

$$6^x = 6^{-3}$$

czyli $x = -3$.

Zadanie 1.95

h) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać 16,

Zadanie 1.95

h) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać 16, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$$

Zadanie 1.95

h) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać 16, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$$

Wystarczy zamienić na potęgi 4 (nie trzeba na 2)

$$4^{-x} = 4^2$$

Zadanie 1.95

h) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać 16, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$$

Wystarczy zamienić na potęgi 4 (nie trzeba na 2)

$$4^{-x} = 4^2$$

czyli $x = -2$.

Zadanie 1.96

a) Chcemy obliczyć $\log_{2\sqrt{2}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $2\sqrt{2}$, by otrzymać 16,

Zadanie 1.96

a) Chcemy obliczyć $\log_{2\sqrt{2}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $2\sqrt{2}$, by otrzymać 16, czyli rozwiązujemy:

$$(2\sqrt{2})^x = 16$$

Zadanie 1.96

a) Chcemy obliczyć $\log_{2\sqrt{2}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $2\sqrt{2}$, by otrzymać 16, czyli rozwiązujemy:

$$(2\sqrt{2})^x = 16$$

Zamieniamy na potęgi 2

$$2^{\frac{3}{2}x} = 2^4$$

Zadanie 1.96

a) Chcemy obliczyć $\log_{2\sqrt{2}} 16$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $2\sqrt{2}$, by otrzymać 16, czyli rozwiązujemy:

$$(2\sqrt{2})^x = 16$$

Zamieniamy na potęgi 2

$$2^{\frac{3}{2}x} = 2^4$$

czyli $x = \frac{8}{3}$.

Zadanie 1.96

g) Chcemy obliczyć $\log_5 125\sqrt{5}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 5, by otrzymać $125\sqrt{5}$,

Zadanie 1.96

g) Chcemy obliczyć $\log_5 125\sqrt{5}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 5, by otrzymać $125\sqrt{5}$, czyli rozwiązujemy:

$$5^x = 125\sqrt{5}$$

Zadanie 1.96

g) Chcemy obliczyć $\log_5 125\sqrt{5}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 5, by otrzymać $125\sqrt{5}$, czyli rozwiązujemy:

$$5^x = 125\sqrt{5}$$

To daje:

$$5^x = 5^{3.5}$$

Zadanie 1.96

g) Chcemy obliczyć $\log_5 125\sqrt{5}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść 5, by otrzymać $125\sqrt{5}$, czyli rozwiązujemy:

$$5^x = 125\sqrt{5}$$

To daje:

$$5^x = 5^{3.5}$$

czyli $x = 3.5$.

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$,

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$, czyli rozwiązujemy:

$$(3\sqrt{3})^x = 81\sqrt[3]{3}$$

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$, czyli rozwiązujemy:

$$(3\sqrt{3})^x = 81\sqrt[3]{3}$$

Zamieniamy na potęgi 3:

$$3^{\frac{3}{2}x} = 3^{4\frac{1}{3}}$$

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$, czyli rozwiązujemy:

$$(3\sqrt{3})^x = 81\sqrt[3]{3}$$

Zamieniamy na potęgi 3:

$$3^{\frac{3}{2}x} = 3^{4\frac{1}{3}}$$

czyli $x = \frac{26}{9}$.

Zadanie 1.97

e) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać $\frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$,

Zadanie 1.97

e) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać $\frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$$

Zadanie 1.97

e) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać $\frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$$

Zamieniamy na potęgi 2

$$2^{-2x} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{6}{5}}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

Zadanie 1.97

e) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać $\frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$$

Zamieniamy na potęgi 2

$$2^{-2x} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{6}{5}}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

czyli:

$$2^{-2x} = 2^{\frac{7}{10}}$$

Zadanie 1.97

e) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $\frac{1}{4}$, by otrzymać $\frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$, czyli rozwiązujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$$

Zamieniamy na potęgi 2

$$2^{-2x} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{6}{5}}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

czyli:

$$2^{-2x} = 2^{\frac{7}{10}}$$

co daje $x = -\frac{7}{20}$.

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$,

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$, czyli rozwiązujemy:

$$(3\sqrt{3})^x = 81\sqrt[3]{3}$$

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$, czyli rozwiązujemy:

$$(3\sqrt{3})^x = 81\sqrt[3]{3}$$

Zamieniamy na potęgi 3:

$$3^{\frac{3}{2}x} = 3^{4\frac{1}{3}}$$

Zadanie 1.96

h) Chcemy obliczyć $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$, to znaczy, do której potęgi trzeba podnieść $3\sqrt{3}$, by otrzymać $81\sqrt[3]{3}$, czyli rozwiązujemy:

$$(3\sqrt{3})^x = 81\sqrt[3]{3}$$

Zamieniamy na potęgi 3:

$$3^{\frac{3}{2}x} = 3^{4\frac{1}{3}}$$

czyli $x = \frac{26}{9}$.

Zadanie 1.98

g) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} 6 - \log_{\frac{1}{3}} 8$.

Zadanie 1.98

g) Chcemy obliczyć $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} 6 - \log_{\frac{1}{3}} 8$. Pamiętamy, że sumę logarytmów zamieniamy na logarytm iloczynu, a różnicę logarytmów na logarytm ilorazu, mamy więc:

$$\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} 6 - \log_{\frac{1}{3}} 8 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{4 \cdot 6}{8} = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

Zadanie 1.99

Zasadniczo jeśli mamy do czynienia z iloczynem logarytmów, to niewiele można zrobić. Są jednak wyjątki. Jeśli mamy $\log_a b \cdot \log_b c$, to możemy to bardzo uprościć zmieniając podsatawę:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c$$

Zadanie 1.99

Zasadniczo jeśli mamy do czynienia z iloczynem logarytmów, to niewiele można zrobić. Są jednak wyjątki. Jeśli mamy $\log_a b \cdot \log_b c$, to możemy to bardzo uprościć zmieniając podsatawę:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c$$

Czyli $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

Zadanie 1.99

Zasadniczo jeśli mamy do czynienia z iloczynem logarytmów, to niewiele można zrobić. Są jednak wyjątki. Jeśli mamy $\log_a b \cdot \log_b c$, to możemy to bardzo uprościć zmieniając podsatawę:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c$$

Czyli $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$. Możemy to zapamiętać i nie zmieniać podstawy za każdym razem.

Zadanie 1.99

a) Chcemy obliczyć $3\log_{0.4} 2 - \log_{0.4} 3 \cdot \log_3 125$.

Zadanie 1.99

a) Chcemy obliczyć $3\log_{0.4}2 - \log_{0.4}3 \cdot \log_3 125$. Najpierw uprościmy iloczyn,

Zadanie 1.99

a) Chcemy obliczyć $3\log_{0.4} 2 - \log_{0.4} 3 \cdot \log_3 125$. Najpierw uprościmy iloczyn, później wrzucimy 3 do logarytmu,

Zadanie 1.99

a) Chcemy obliczyć $3\log_{0.4} 2 - \log_{0.4} 3 \cdot \log_3 125$. Najpierw uprościmy iloczyn, później wrzucimy 3 do logarytmu, a na końcu zamienimy odejmowanie na dzielenie:

Zadanie 1.99

a) Chcemy obliczyć $3\log_{0.4}2 - \log_{0.4}3 \cdot \log_3 125$. Najpierw uprościmy iloczyn, później wrzucimy 3 do logarytmu, a na końcu zamienimy odejmowanie na dzielenie:

$$\begin{aligned} 3\log_{0.4}2 - \log_{0.4}3 \cdot \log_3 125 &= 3\log_{0.4}2 - \log_{0.4}125 = \\ &= \log_{0.4}2^3 - \log 0.4125 = \\ &= \log_{\frac{2}{5}}\frac{2^3}{5^3} = 3 \end{aligned}$$

Zadanie 1.99

c) Chcemy obliczyć $\log_4 9 \cdot \log_3 128$.

Zadanie 1.99

c) Chcemy obliczyć $\log_4 9 \cdot \log_3 128$. Byłoby idealnie, gdyby zamiast 9 była 3, bo wtedy byśmy skrócili. Na szczęście to nie problem:

Zadanie 1.99

c) Chcemy obliczyć $\log_4 9 \cdot \log_3 128$. Byłoby idealnie, gdyby zamiast 9 była 3, bo wtedy byśmy skrócili. Na szczęście to nie problem:

$$\log_4 9 \cdot \log_3 128 = \log_4 3^2 \cdot \log_3 128 = 2\log_4 3 \cdot \log_3 128 = 2\log_4 128$$

Zadanie 1.99

c) Chcemy obliczyć $\log_4 9 \cdot \log_3 128$. Byłoby idealnie, gdyby zamiast 9 była 3, bo wtedy byśmy skrócili. Na szczęście to nie problem:

$$\log_4 9 \cdot \log_3 128 = \log_4 3^2 \cdot \log_3 128 = 2\log_4 3 \cdot \log_3 128 = 2\log_4 128$$

Musimy teraz jeszcze obliczyć $\log_4 128$, czyli $4^x = 128$, czyli $2^{2x} = 2^7$, a więc $x = 3.5$, to daje

Zadanie 1.99

c) Chcemy obliczyć $\log_4 9 \cdot \log_3 128$. Byłoby idealnie, gdyby zamiast 9 była 3, bo wtedy byśmy skrócili. Na szczęście to nie problem:

$$\log_4 9 \cdot \log_3 128 = \log_4 3^2 \cdot \log_3 128 = 2\log_4 3 \cdot \log_3 128 = 2\log_4 128$$

Musimy teraz jeszcze obliczyć $\log_4 128$, czyli $4^x = 128$, czyli $2^{2x} = 2^7$, a więc $x = 3.5$, to daje :

$$\log_4 9{\cdot}\log_3 128 = \log_4 3^2{\cdot}\log_3 128 = 2\log_4 3\mathit{cdot}\log_3 128 = 2\log_4 128 = 2{\cdot}3.5$$

Zadanie 1.100

Na końcu musimy jeszcze pamiętać o prostej zasadzie $a^{\log_a b} = b$.

Zadanie 1.100

Na końcu musimy jeszcze pamiętać o prostej zasadzie $a^{\log_a b} = b$.

$\log_a b$ oznacza liczbę, do której musielibyśmy podnieść a, żeby otrzymać b.

Zadanie 1.100

Na końcu musimy jeszcze pamiętać o prostej zasadzie $a^{\log_a b} = b$.

$\log_a b$ oznacza liczbę, do której musielibyśmy podnieść a, żeby otrzymać b.

Czyli obliczając $a^{\log_a b}$ **podnosimy a do potęgi , do której musielibyśmy podnieść a, żeby otrzymać** b. Proszę sobie ten pogrubiony fragment powtarzać do momentu aż będzie oczywiste, że wynikiem tego działania jest b.

Zadanie 1.100

a) Banał. $3^{\log_3 2} = 2$.

Zadanie 1.100

e) Chcemy obliczyć $5^{\frac{1}{2}\log_5 16}$. Przeszkadza nam ta $\frac{1}{2}$, ale możemy ją wrzucić do potęgi wewnątrz logarytmu:

Zadanie 1.100

e) Chcemy obliczyć $5^{\frac{1}{2}\log_5 16}$. Przeszkadza nam ta $\frac{1}{2}$, ale możemy ją wrzucić do potęgi wewnątrz logarytmu:

$$5^{\frac{1}{2}\log_5 16} = 5^{\log_5 \sqrt{16}} = 5^{\log_5 4} = 4$$

Zadanie 1.100

f) Chcemy obliczyć $16^{\log_2 \sqrt{3}+0.25}$. Przeszkadza nam ta 0.25 oraz to, że zamiast 2 mamy 16.

Zadanie 1.100

f) Chcemy obliczyć $16^{\log_2 \sqrt{3}+0.25}$. Przeszkadza nam ta 0.25 oraz to, że zamiast 2 mamy 16.

$$\begin{aligned}
16^{\log_2 \sqrt{3}+0.25} &= 16^{\log_2 \sqrt{3}} \cdot 16^{0.25} = \\
&= 2^{4\log_2 \sqrt{3}} \cdot 2 = \\
&= 2^{\log_2 \sqrt{3}^4} \cdot 2 = \\
&= 2^{\log_2 9} \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18
\end{aligned}$$

Wejściówka

Na wejściówce będzie zadanie podobne do któregos z przykładów od 1.96 do 1.100.