Równania wykładnicze

Musimy umieć rozwiązać proste równania wykładnicze.

Równania wykładnicze to równania postaci:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

gdzie $a, b > 0$, a f, g to funkcje rzeczywiste. W naszych przykładach w wykładnikach będą występowały funkcje liniowe, kwadratowe (rzadziej wielomiany wyższego stopnia) i wartość bezwględna.

Ogólna strategia

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Przykład. Rozwiąż $3^{2x-1} = 243$

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Przykład. Rozwiąż $3^{2x-1} = 243$

$$3^{2x-1} = 243$$
$$3^{2x-1} = 3^5$$

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Przykład. Rozwiąż $3^{2x-1} = 243$

$$3^{2x-1} = 243$$
$$3^{2x-1} = 3^5$$

Teraz przyrównujemy wykładniki:

$$2x - 1 = 5$$
$$x = 3$$

Przykład 1

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4^{x+2}$$

Przykład 1

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4^{x+2}$$

Zapisujemy jako potęgi 2:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} &= 4^{x+2}\\ 2^{-x-1} &= 2^{2x+4}\end{aligned}$$

Przykład 1

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4^{x+2}$$

Zapisujemy jako potęgi 2:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4^{x+2}$$
$$2^{-x-1} = 2^{2x+4}$$

Przyrównujemy wykładniki:

$$-x - 1 = 2x + 4$$
$$x = -\frac{5}{3}$$

Przykład 2

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$

Przykład 2

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$

Zapisujemy jako potęgi 3:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$

$$3^{-2x+4} = 3^{\frac{x}{2}+3}$$

Przykład 2

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$

Zapisujemy jako potęgi 3:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$
$$3^{-2x+4} = 3^{\frac{x}{2}+3}$$

Przyrównujemy wykładniki:

$$-2x + 4 = \frac{x}{2} + 3$$
$$x = \frac{2}{5}$$

Przykład 3

Rozwiąż

$$4 \times 8^x = (2\sqrt{2})^{-x}$$

Przykład 3

Rozwiąż

$$4 \times 8^x = (2\sqrt{2})^{-x}$$

Rozwiązanie:

Przykład 3

Rozwiąż

$$4 \times 8^x = (2\sqrt{2})^{-x}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 4 \times 8^x &= (2\sqrt{2})^{-x} \\ 2^2 \times 2^{3x} &= 2^{-\frac{3}{2}x} \\ 2^{3x+2} &= 2^{-\frac{3}{2}x} \\ 3x + 2 &= -\frac{3}{2}x \\ x &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

Przykład 4

Rozwiąż
$$3 \times 81^{x-1} = (\sqrt[3]{3})^{-2x}$$

Przykład 4

Rozwiąż

$$3 \times 81^{x-1} = (\sqrt[3]{3})^{-2x}$$

Rozwiązanie (spróbujcie najpierw sami rowziązać):

Przykład 4

Rozwiąż

$$3 \times 81^{x-1} = (\sqrt[3]{3})^{-2x}$$

Rozwiązanie (spróbujcie najpierw sami rowziązać):

$$\begin{aligned}
3 \times 81^{x-1} &= (\sqrt[3]{3})^{-2x} \\
3 \times 3^{4x-4} &= 3^{-\frac{2x}{3}} \\
3^{4x-3} &= 3^{-\frac{2x}{3}} \\
4x - 3 &= -\frac{2x}{3} \\
x &= \frac{9}{14}
\end{aligned}$$

Przykład 5

Rozwiąż

$$4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{2} \times 16^{x-1}$$

Przykład 5

Rozwiąż

$$4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{2} \times 16^{x-1}$$

Rozwiązanie:

Przykład 5

Rozwiąż

$$4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x} = \frac{1}{2} \times 16^{x-1}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x} &= \frac{1}{2} \times 16^{x-1} \\
2^2 \times 2^{-\frac{x}{2}} &= 2^{-1} \times 2^{4x-4} \\
2^{2-\frac{x}{2}} &= 2^{4x-5} \\
2 - \frac{x}{2} &= 4x - 5 \\
x &= \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

Przykład 6

Rozwiąż

$$2^{|x+3|} = 1024$$

Przykład 6

Rozwiąż

$$2^{|x+3|} = 1024$$

Rozwiązanie:

Przykład 6

Rozwiąż
$$2^{|x+3|} = 1024$$

Rozwiązanie:
$$\begin{aligned} 2^{|x+3|} &= 1024 \\ 2^{|x+3|} &= 2^{10} \\ |x+3| &= 10 \end{aligned}$$
$$x+3=-10 \quad \vee \quad x+3=10$$
$$x=-13 \quad \vee \quad x=7$$

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Rozwiązanie:

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 3^{|x-2|} &= 9^x \\ 3^{|x-2|} &= 3^{2x} \\ |x-2| &= 2x \end{aligned}$$

Musimy rozwiązać $|x-2| = 2x$.

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Musimy rozwiązać $|x-2| = 2x$.

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Musimy rozwiązać $|x-2| = 2x$.

$$\begin{array}{c|c} x < 2 & x \geqslant 2 \\ -(x-2) = 2x & x - 2 = 2x \\ x = \frac{2}{3} & x = -2 \\ \frac{2}{3} < 2 & -2 \not\geqslant 2 \end{array}$$

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Musimy rozwiązać $|x-2| = 2x$.

$x < 2$	$x \geqslant 2$
$-(x-2) = 2x$	$x - 2 = 2x$
$x = \frac{2}{3}$	$x = -2$
$\frac{2}{3} < 2$	$-2 \ngeqslant 2$

Otrzymujemy $x = \frac{2}{3}$.

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Rozwiązanie:

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} &= 4^{x+1} \\
2^{x^2-1} &= 2^{2x+2} \\
x^2 - 1 &= 2x + 2 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
(x-3)(x+1) &= 0
\end{aligned}$$

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} &= 4^{x+1} \\ 2^{x^2-1} &= 2^{2x+2} \\ x^2 - 1 &= 2x + 2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Otrzymujemy $x = 3$ lub $x = -1$.

Na wejściówkę trzeba umieć rozwiązać równania wykładnicze podobne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.