Funkcja liniowa

Musimy umieć:

- rozpoznać, czy dwie wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli są, to musimy umieć obliczyć współczynnik proporcjonalności,
- naszkicować wykres funkcji liniowej,
- określić, czy dana funkcja liniowa jest rosnąca, malejąca czy stała,
- wyznaczyć wartości parametru, dla których dana funkcja liniowa jest rosnąca, malejąca lub stała.

Proporcjonalność prosta

Definicja

Wartość y jest wprost proporcjonalna do wartości x, jeśli $y = a \times x$, gdzie $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Liczba a nazywana jest współczynnikiem proporcjonalności.

Przykłady:

Określ, czy dane wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli tak to określi współczynnik proporcjonalności:

a) Obwód oraz długość przekątnej kwadratu.

Przykłady:

Określ, czy dane wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli tak to określi współczynnik proporcjonalności:

a) Obwód oraz długość przekątnej kwadratu.
Tak. $Ob = 4a$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $Ob = \frac{4}{\sqrt{2}}d = 2\sqrt{2}d$.

Przykłady:

Określ, czy dane wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli tak to określi współczynnik proporcjonalności:

a) Obwód oraz długość przekątnej kwadratu.
Tak. $Ob = 4a$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $Ob = \frac{4}{\sqrt{2}}d = 2\sqrt{2}d$.
Współczynnik proporcjonalności wynosi $2\sqrt{2}$.

Przykłady:

Określ, czy dane wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli tak to określi współczynnik proporcjonalności:

a) Obwód oraz długość przekątnej kwadratu.
Tak. $Ob = 4a$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $Ob = \frac{4}{\sqrt{2}}d = 2\sqrt{2}d$.
Współczynnik proporcjonalności wynosi $2\sqrt{2}$.

b) Pole oraz długość przekątnej kwadratu.

Przykłady:

Określ, czy dane wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli tak to określi współczynnik proporcjonalności:

a) Obwód oraz długość przekątnej kwadratu.
Tak. $Ob = 4a$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $Ob = \frac{4}{\sqrt{2}}d = 2\sqrt{2}d$.
Współczynnik proporcjonalności wynosi $2\sqrt{2}$.

b) Pole oraz długość przekątnej kwadratu.
Nie. $P = a^2$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $P = \frac{d^2}{2}$.

Przykłady:

Określ, czy dane wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli tak to określi współczynnik proporcjonalności:

a) Obwód oraz długość przekątnej kwadratu.
Tak. $Ob = 4a$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $Ob = \frac{4}{\sqrt{2}}d = 2\sqrt{2}d$.
Współczynnik proporcjonalności wynosi $2\sqrt{2}$.

b) Pole oraz długość przekątnej kwadratu.
Nie. $P = a^2$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $P = \frac{d^2}{2}$.

c) Pole koła opisanego na trójkącie równoboczny i pole tego trójkąta.

Przykłady:

Określ, czy dane wielkości są wprost proporcjonalne, a jeśli tak to określi współczynnik proporcjonalności:

a) Obwód oraz długość przekątnej kwadratu.
Tak. $Ob = 4a$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $Ob = \frac{4}{\sqrt{2}}d = 2\sqrt{2}d$.
Współczynnik proporcjonalności wynosi $2\sqrt{2}$.

b) Pole oraz długość przekątnej kwadratu.
Nie. $P = a^2$, $d = a\sqrt{2}$, czyli $P = \frac{d^2}{2}$.

c) Pole koła opisanego na trójkącie równoboczny i pole tego trójkąta.
Tak.

Przykład

$P_\circ = \pi r^2$ natomiast $P_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Przykład

$P_\circ = \pi r^2$ natomiast $P_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Wiemy również, że $r = \frac{2}{3}h$, a $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Stąd otrzymujemy: $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Przykład

$P_\circ = \pi r^2$ natomiast $P_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Wiemy również, że $r = \frac{2}{3}h$, a $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Stąd otrzymujemy: $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Podstawiając do wzoru na pole koła dostajemy:

$$P_\circ = \frac{a^2\pi}{3}$$

czyli:

$$\frac{P_\circ}{P_\triangle} = \frac{\frac{a^2\pi}{3}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Przykład

Ostatecznie otrzymujemy

$$P_{\circ} = \frac{\frac{a^2\pi}{3}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} P_{\triangle}$$

czyli współczynnik proporcjonalności wynosi $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ lub (po usunięciu niewymierności z mianownika) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$.

Funkcja liniowa

Definicja

Funkcja liniowa to funkcja, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$

Funkcja liniowa

Definicja

Funkcja liniowa to funkcja, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$

Kluczowe jest słowo **można**. Równanie $2x - 3y + 1 = 0$ opisuję funkcje liniową, gdyż po przekształceniu otrzymujemy:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Funkcja liniowa

Definicja

Funkcja liniowa to funkcja, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$

Kluczowe jest słowo **można**. Równanie $2x - 3y + 1 = 0$ opisuję funkcje liniową, gdyż po przekształceniu otrzymujemy:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Druga ważna sprawa to $a, b \in \mathbb{R}$. W szczególności a i b mogą być zero. $y = 0$ to też funkcja liniowa (choć mało ciekawa).

Współczynniki

a nazywamy współczynnikiem kierunkowym,

b nazywamy wyrazem wolnym.

Współczynniki

a nazywamy współczynnikiem kierunkowym,

b nazywamy wyrazem wolnym.

Proszę wejść na stronę https://www.desmos.com/calculator, wpisać funkcję $y = ax + b$, dodać suwaki dla a i b i troszkę się tym pobawić.

Współczynniki

- **a** nazywamy współczynnikiem kierunkowym,
- **b** nazywamy wyrazem wolnym.

Proszę wejść na stronę https://www.desmos.com/calculator, wpisać funkcję $y = ax + b$, dodać suwaki dla a i b i troszkę się tym pobawić. Po kilkunastu sekundach tej fascynującej rozrywki można dojść do dwóch wniosków:

- **a** decyduje o tym, jak bardzo nachylony do osi OX jest wykres naszej funkcji,
- **b** określa punkt przecięcia z osią OY.

Współczynnik kierunkowy

W szczególności możemy doprecyzować wnioski dotyczące współczynnika kierunkowego a:

Jeśli $a > 0$, to funkcja jest rosnąca,

jeśli $a = 0$, to funkcja jest stała,

jeśli $a < 0$, to funkcja jest malejąca.

Przykład 1

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$y = \frac{m+1}{2}x - (m+3)$$

jest malejąca.

Przykład 1

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$y = \frac{m+1}{2}x - (m+3)$$

jest malejąca.

Mamy $a = \frac{m+1}{2}$ oraz $b = -(m+3)$ (ale oczywiście b nas średnio interesuje w tym przykładzie).

Przykład 1

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$y = \frac{m+1}{2}x - (m+3)$$

jest malejąca.

Mamy $a = \frac{m+1}{2}$ oraz $b = -(m+3)$ (ale oczywiście b nas średnio interesuje w tym przykładzie).

Rozwiązujemy:

$$\begin{aligned} a &< 0 \\ \frac{m+1}{2} &< 0 \\ m &< -1 \end{aligned}$$

Funkcja jest malejąca dla $m < -1$.

Przykład 2

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$mx + 5y - 4x + m = 2$$

jest rosnąca.

Przykład 2

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$mx + 5y - 4x + m = 2$$

jest rosnąca.

Przekształcamy funkcję do odpowiedniej postaci, otrzymujemy:

$$y = \frac{4-m}{5}x + \frac{2-m}{5}$$

Przykład 2

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$mx + 5y - 4x + m = 2$$

jest rosnąca.

Przekształcamy funkcję do odpowiedniej postaci, otrzymujemy:

$$y = \frac{4-m}{5}x + \frac{2-m}{5}$$

Mamy $a = \frac{4-m}{5}$ oraz $b = \frac{2-m}{5}$.

Przykład 2

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$mx + 5y - 4x + m = 2$$

jest rosnąca.

Przekształcamy funkcję do odpowiedniej postaci, otrzymujemy:

$$y = \frac{4-m}{5}x + \frac{2-m}{5}$$

Mamy $a = \frac{4-m}{5}$ oraz $b = \frac{2-m}{5}$.

Rozwiązujemy $a > 0$, otrzymujemy $m < 4$.

Przykład 3

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$y = 2x - 3 + m^2x + m$$

jest malejąca.

Przykład 3

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$y = 2x - 3 + m^2x + m$$

jest malejąca.

Przekształcamy funkcję do odpowiedniej postaci, otrzymujemy:

$$y = (2 + m^2)x + m - 3$$

Przykład 3

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$y = 2x - 3 + m^2x + m$$

jest malejąca.

Przekształcamy funkcję do odpowiedniej postaci, otrzymujemy:

$$y = (2 + m^2)x + m - 3$$

Mamy $a = 2 + m^2$ oraz $b = m - 3$.

Przykład 3

Określ dla jakich wartości parametru m funkcja:

$$y = 2x - 3 + m^2x + m$$

jest malejąca.

Przekształcamy funkcję do odpowiedniej postaci, otrzymujemy:

$$y = (2 + m^2)x + m - 3$$

Mamy $a = 2 + m^2$ oraz $b = m - 3$.

Rozwiązujemy $2 + m^2 < 0$. Nierówność ta nie ma rozwiązań, gdyż $2 + m^2$ jest zawsze dodatnie, stąd wnioskujemy, że dana funkcja nie jest malejąca dla żadnego m.

Rysowanie funkcji liniowych

Jeśli, na podstawie wzoru, wiemu już, że mamy do czynienia z funkcją liniową, to narysowanie jej jest bardzo proste. Są dwa sposoby:

Rysowanie funkcji liniowych

Jeśli, na podstawie wzoru, wiemu już, że mamy do czynienia z funkcją liniową, to narysowanie jej jest bardzo proste. Są dwa sposoby:

- Wiem, że wykresem funkcji będzie linia prosta, a linia prosta wyznaczana jest przez dwa punkty (tzn. przed dane dwa punkty przechodzi tylko jedna linia prosta). Wystarczy więc znaleźć dwa punkty na wykresie danej funkcji liniowej i narysować prostą przez nie przechodzącą.

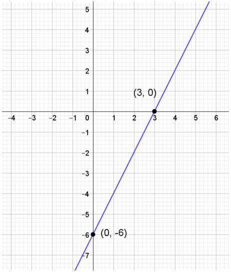
Rysowanie funkcji liniowych

Jeśli, na podstawie wzoru, wiemu już, że mamy do czynienia z funkcją liniową, to narysowanie jej jest bardzo proste. Są dwa sposoby:

- Wiem, że wykresem funkcji będzie linia prosta, a linia prosta wyznaczana jest przez dwa punkty (tzn. przed dane dwa punkty przechodzi tylko jedna linia prosta). Wystarczy więc znaleźć dwa punkty na wykresie danej funkcji liniowej i narysować prostą przez nie przechodzącą.
- Korzystamy ze znaczenia współczynników **a** i **b** we wzorze funkcji liniowej. Przypomnijmy: **a** decyduje o nachyleniu, **b** o miejscu przecięcia z osią OY.

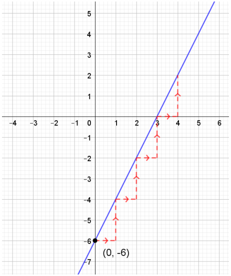
Rysowanie funkcji liniowych - przykład

Narysuj wykres funkcji $y = 2x - 6$.
1. Chcę znaleźć dwa punkty na wykresie tej funkcji. Podstawiam pod jedną ze zmiennych wybraną wartość i obliczam drugą zmienną. Gdy $x = 0$, to $y = -6$, mam pierwszy punkt $(0, -6)$. Gdy $x = 3$, to $y = 0$, mam drugi punkt $(3, 0)$. Nanoszę te dwa punkty na wykres i rysuję prostą przez nie przechodzącą:



Rysowanie funkcji liniowych - przykład

Narysuj wykres funkcji $y = 2x - 6$.
2. Współczynnik **b** mówi mi, że funkcja przetnie OY w punkcie $(0, -6)$, zaznaczam ten punkt. Współczynnik **a** mówi mi, że funkcja rośnie w tempie 2. To znaczy, że jeśli współrzędna x zwiększy się o 1, to współrzędna y zwiększy się dwa razy tyle (czyli o 2). Zaznaczam to na wykresie:



W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.