Asymptoty

Na prezentacji omówione zostaną przykłady znajdowania asymptot różnych funkcji.

Wprowadzenie

Przeanalizujemy trzy funkcje. Najpierw narysujemy je w programie www.desmos.com/calculator i na wykresie zobaczymy asymptoty. Później obliczymy równania asymptot algebraicznie.

Wprowadzenie

Przeanalizujemy trzy funkcje. Najpierw narysujemy je w programie www.desmos.com/calculator i na wykresie zobaczymy asymptoty. Później obliczymy równania asymptot algebraicznie.

Najpierw jednak przypomnijmy kiedy mamy do czynienia z asymptotami.

Asymptota pionowa

Z asymptotą pionową mamy do czynienia, gdy spełniony jest jeden z czterech warunków:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

lub

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

lub

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

lub

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

W każdym z tych przypadków fukcja $f(x)$ będzie miała asymptotę pionową $x = a$.

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a, z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a, z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład:

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a, z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a, z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę pionową $x = 1$, gdyż

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$$

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a, z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę pionową $x = 1$, gdyż

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$$

To już nam wystarcza, by stwierdzić, że jest asymptota pionowa w $x = 1$, ale możemy jeszcze dodać, że mamy jeszcze:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu:

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę poziomą $y = 2$, gdyż

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę poziomą $y = 2$, gdyż

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

Dodajmy, że mamy również

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome.

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome.

Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$.

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome.

Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$.

Ta funkcja ma asymptoty poziome $y = 1$ (prawa, gdy $x \to \infty$) oraz $y = -1$ (lewa, gdy $x \to -\infty$).

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome.

Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$.

Ta funkcja ma asymptoty poziome $y = 1$ (prawa, gdy $x \to \infty$) oraz $y = -1$ (lewa, gdy $x \to -\infty$).

Mamy bowiem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome.

Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$.

Ta funkcja ma asymptoty poziome $y = 1$ (prawa, gdy $x \to \infty$) oraz $y = -1$ (lewa, gdy $x \to -\infty$).

Mamy bowiem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Warto tę funkcję narysować na www.desmos.com/calculator.

Asymptoty ukośne

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x)$ jeśli spełniony jest co najmniej jeden z poniższych warunków:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

lub

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Czyli jak x dąży do nieskończoności (lub minus nieskończoności) to różnica wartości między naszą funkcją a funkcją liniową $ax + b$ dąży do 0. Czyli nasza funkcja dąży do funkcji liniowej.

Asymptoty ukośne

W praktyce asymptot ukośnych będziemy szukali w dwóch krokach. Pierwszy krok to znalezienie a:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Gdy już mamy a, to szukamy b:

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

Oczywiście powinniśmy sprawdzić też asymptotę, jak $x \to -\infty$ (chyba, że widać, że znak nie ma żadnego znaczenia w obliczeniach)

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik $= 0$, licznik $\neq 0$.

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik $= 0$, licznik $\neq 0$. Tutaj ważna uwaga: gdy w ułamku otrzymujemy $\frac{0}{0}$, to nie możemy **niczego** wywnioskować, trzeba coś uprościć lub inaczej policzyć.

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik $= 0$, licznik $\neq 0$. Tutaj ważna uwaga: gdy w ułamku otrzymujemy $\frac{0}{0}$, to nie możemy **niczego** wywnioskować, trzeba coś uprościć lub inaczej policzyć.

To, czy mamy asymptotę poziomą, ukośną, czy żadną z nich można łatwo sprawdzić analizując potęgi x. Musimy ograniczyć się jedynie do najwyższej potęgi x występującej w liczniku i mianowniku. Jeśli różnca potęga x wynosi 1 (w liczniku jest o 1 wyższa niż w mianowniku) to będziemy mieli asymptotę ukośną. Jeśli różnica potęg jest 0 lub mniejsza, to mamy asymptotę poziomą. W każdym innym przypadku nie będzie asymptoty poziomej/ukośnej.

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik $= 0$, licznik $\neq 0$. Tutaj ważna uwaga: gdy w ułamku otrzymujemy $\frac{0}{0}$, to nie możemy **niczego** wywnioskować, trzeba coś uprościć lub inaczej policzyć.

To, czy mamy asymptotę poziomą, ukośną, czy żadną z nich można łatwo sprawdzić analizując potęgi x. Musimy ograniczyć się jedynie do najwyższej potęgi x występującej w liczniku i mianowniku. Jeśli różnca potęga x wynosi 1 (w liczniku jest o 1 wyższa niż w mianowniku) to będziemy mieli asymptotę ukośną. Jeśli różnica potęg jest 0 lub mniejsza, to mamy asymptotę poziomą. W każdym innym przypadku nie będzie asymptoty poziomej/ukośnej. Wyjaśnimy to jeszcze na zajęciach.

Przykład 1

Zacznijmy od funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

Przykład 1

Zacznijmy od funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.
Sprawdzamy granicę, gdy $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$

A więc funkcja będzie miała asymptotę pionową $x = 1$.

Przykład 1

Zacznijmy od funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.
Sprawdzamy granicę, gdy $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$

A więc funkcja będzie miała asymptotę pionową $x = 1$. Będzie też asymptota ukośna, bo najwyższa potęga licznika jest o 1 wyższa od najwyższej potęgi mianownika.

Przykład 1

Obliczamy wzór asymptoty ukośnej $y = ax + b$.

Przykład 1

Obliczamy wzór asymptoty ukośnej $y = ax + b$. Zaczynamy od a:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x} = 1$$

Przykład 1

Obliczamy wzór asymptoty ukośnej $y = ax + b$. Zaczynamy od a:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x} = 1$$

Teraz obliczamy b:

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x + 6}{x - 1} = -4$$

Czyli mamy asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \to -\infty$ otrzymamy te same wyniki).

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \to -\infty$ otrzymamy te same wyniki). Ostatecznie mamy jedną asymptotę pionową $x = 1$ oraz jedną asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \to -\infty$ otrzymamy te same wyniki). Ostatecznie mamy jedną asymptotę pionową $x = 1$ oraz jedną asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Warto teraz narysować wykres tej funkcji na www.desmos.com/calculator.

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \to -\infty$ otrzymamy te same wyniki). Ostatecznie mamy jedną asymptotę pionową $x = 1$ oraz jedną asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Warto teraz narysować wykres tej funkcji na www.desmos.com/calculator. Najlepiej narysować $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ oraz asymptoty $x = 1$ i $y = x - 4$.

Przykład 2

Przeanalizujmy asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x+4}{|x|-2}$

Przykład 2

Przeanalizujmy asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x+4}{|x|-2}$
Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdzimy granice $x \longrightarrow -2$ oraz $x \longrightarrow 2$

Przykład 2

Przeanalizujmy asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x+4}{|x|-2}$
Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdzimy granice $x \to -2$ oraz $x \to 2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{-x-2} = -2$$

Czyli nie ma asymptoty pionowej w $x = -2$.

Przykład 2

Przeanalizujmy asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x+4}{|x|-2}$

Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdzimy granice $x \longrightarrow -2$ oraz $x \longrightarrow 2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{2x+4}{-x-2} = -2$$

Czyli nie ma asymptoty pionowej w $x = -2$. Uwaga: nie musiałem analizować osobno przypadku $x \rightarrow -2^-$ i $x \rightarrow -2^+$. Wychodzi to samo.

Przykład 2

Przeanalizujmy asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x+4}{|x|-2}$

Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdzimy granice $x \to -2$ oraz $x \to 2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{-x-2} = -2$$

Czyli nie ma asymptoty pionowej w $x = -2$. Uwaga: nie musiałem analizować osobno przypadku $x \to -2^-$ i $x \to -2^+$. Wychodzi to samo. Druga uwaga: ponieważ $x \to -2$, to x jest ujemny, a więc $|\ |$ zmienia znak.

Przykład 2

Przeanalizujmy asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x+4}{|x|-2}$
Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdzimy granice $x \to -2$ oraz $x \to 2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{-x-2} = -2$$

Czyli nie ma asymptoty pionowej w $x = -2$. Uwaga: nie musiałem analizować osobno przypadku $x \to -2^-$ i $x \to -2^+$. Wychodzi to samo. Druga uwaga: ponieważ $x \to -2$, to x jest ujemny, a więc $|\ |$ zmienia znak.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x+4}{x-2} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty$$

Czyli mamy pionową asymptotę w $x = 2$.

Przykład 2

Analizując potęgi x, dochodzimy do wniosku, że będą też poziome asymptoty (różnica potęg wynosi 0).

Przykład 2

Analizując potęgi x, dochodzimy do wniosku, że będą też poziome asymptoty (różnica potęg wynosi 0). Policzmy:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+4}{x-2} = 2$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y = 2$ (prawą, dla $x \to \infty$).

Przykład 2

Analizując potęgi x, dochodzimy do wniosku, że będą też poziome asymptoty (różnica potęg wynosi 0). Policzmy:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{|x|-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{x-2}=2$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y=2$ (prawą, dla $x\to\infty$). Policzmy też co się dzieje, gdy $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{|x|-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-x-2}=-2$$

Mamy więc drugą poziomą asymptotę $y=-2$ (lewą, dla $x\to-\infty$).

Przykład 2

Podsumowując: funkcja $f(x) = \frac{2x+4}{|x|-2}$ ma jedną pionową asymptotę $x = 2$ oraz dwie poziome asymptoty $y = -2$ i $y = 2$. Warto ją narysować w programie, by zobaczyć, jak wygląda jej wykres.

Przykład 3

Teraz bardziej skomplikowana funkcja: $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x} & x < -2 \\ \frac{x+2}{x-1} & -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{x^2+3x+1}{x+2} & x > 3 \end{cases}$

Przykład 3

Teraz bardziej skomplikowana funkcja: $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x} & x < -2 \\ \frac{x+2}{x-1} & -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{x^2+3x+1}{x+2} & x > 3 \end{cases}$

Najpierw asymptoty pionowe. Jedyny kandydat to $x = 1$ (czy wiadomo dlaczego **tylko** $x = 1$? Jeśli nie, to proszę o to dopytać na zajęciach).

Przykład 3

Teraz bardziej skomplikowana funkcja: $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x} & x < -2 \\ \frac{x+2}{x-1} & -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{x^2+3x+1}{x+2} & x > 3 \end{cases}$

Najpierw asymptoty pionowe. Jedyny kandydat to $x = 1$ (czy wiadomo dlaczego **tylko** $x = 1$? Jeśli nie, to proszę o to dopytać na zajęciach). Sprawdzamy

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = \infty$$

Czyli mamy pionową asymptotę $x = 1$.

Przykład 3

Gdy $x \to -\infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{6}{x}$, a tu będzie pozioma asymptota. Obliczamy:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Przykład 3

Gdy $x \to -\infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{6}{x}$, a tu będzie pozioma asymptota. Obliczamy:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y = 0$ (lewą, gdy $x \to -\infty$).

Przykład 3

Gdy $x \to -\infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{6}{x}$, a tu będzie pozioma asymptota. Obliczamy:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y = 0$ (lewą, gdy $x \to -\infty$).

Gdy $x \to \infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{x^2+3x+1}{x+2}$, a tu będzie ukośna asymptota. Będzie miała wzór $y = ax + b$. Obliczamy a:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2x} = 1$$

Czyli $a = 1$. Obliczamy teraz b:

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2+3x+1}{x+2} - x\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$$

Przykład 3

Ostatecznie mamy pionową asymptotę $x = 1$, poziomą asymptotę $y = 0$ oraz ukośną asymptotę $y = x + 1$.

Przykład 3

Ostatecznie mamy pionową asymptotę $x = 1$, poziomą asymptotę $y = 0$ oraz ukośną asymptotę $y = x + 1$. Warto narysować wykres. W desmos wpisujemy: $f(x) = \left\{x < -2 : \frac{6}{x}, -2 \leqslant x \leqslant 3 : \frac{x+2}{x-1}, x > 3 : \frac{x^2+3x+1}{x+2}\right\}$ Warto dopisać też równania asymptot.