Funkcja pochodna

Wprowadzenie

Teraz częściej zamiast liczyć pochodną danej funkcji w punkcie będziemy liczyć funkcję pochodną

Wprowadzenie

Teraz częściej zamiast liczyć pochodną danej funkcji w punkcie będziemy liczyć funkcję pochodną (która po podstawieniu danego argumentu da nam wartość pochodnej funkcji w punkcie)

Przykład

Przeanalizujmy funkcję $f(x) = x^2$ i jej pochodną w punkcie $x = 2$.

Przykład

Przeanalizujmy funkcję $f(x) = x^2$ i jej pochodną w punkcie $x = 2$.
Obliczamy standardowo:

Przykład

Przeanalizujmy funkcję $f(x) = x^2$ i jej pochodną w punkcie $x = 2$.
Obliczamy standardowo:

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4
\end{aligned}
$$

Przykład

Przeanalizujmy funkcję $f(x) = x^2$ i jej pochodną w punkcie $x = 2$. Obliczamy standardowo:

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4
\end{aligned}
$$

Czyli $f'(2) = 4$, nachylenie (pochodna) funkcji $f(x) = x^2$ dla $x = 2$ wynosi 4.

Przykład

Przeanalizujmy funkcję $f(x) = x^2$ i jej pochodną w punkcie $x = 2$. Obliczamy standardowo:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

Czyli $f'(2) = 4$, nachylenie (pochodna) funkcji $f(x) = x^2$ dla $x = 2$ wynosi 4. Gdybyśmy teraz chcieli obliczyć pochodną tej samej funkcji dla $x = 3$ i $x = 4$ musielibyśmy robić wszystko jeszcze dwa razy.

Przykład 1

Możemy jednak od razu policzyć funkcję pochodną $f'(x)$, czyli nie podstawiać niczego pod x.

Przykład 1

Możemy jednak od razu policzyć funkcję pochodną $f'(x)$, czyli nie podstawiać niczego pod x.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}
$$

Przykład 1

Możemy jednak od razu policzyć funkcję pochodną $f'(x)$, czyli nie podstawiać niczego pod x.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}
$$

Obliczyliśmy, że funkcją pochodną od funkcji $f(x) = x^2$ jest $f'(x) = 2x$.

Przykład 1

Możemy jednak od razu policzyć funkcję pochodną $f'(x)$, czyli nie podstawiać niczego pod x.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Obliczyliśmy, że funkcją pochodną od funkcji $f(x) = x^2$ jest $f'(x) = 2x$. Teraz gdybym chciał policzyć pochodną funkcji $f(x) = x^2$ dla $x = 2$, $x = 3$ i $x = 4$, to nic prostszego, podstawiam odpowiednie argumenty do funkcji pochodnej:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 \qquad f'(3) = 2 \cdot 3 = 6 \qquad f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

Przykład 2

Obliczmy funkcję pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i na tej podstawie obliczymy pochodną tej funkcji dla $x = -2$ oraz $x = 3$.

Przykład 2

Obliczmy funkcję pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i na tej podstawie obliczymy pochodną tej funkcji dla $x = -2$ oraz $x = 3$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

Przykład 2

Obliczmy funkcję pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i na tej podstawie obliczymy pochodną tej funkcji dla $x = -2$ oraz $x = 3$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

Czyli $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, a więc $f'(-2) = -\frac{1}{4}$, a $f'(3) = -\frac{1}{9}$.

Funkcja pochodna

Obliczanie funkcji pochodnej może być czasochłonne w bardzie złożonych przypadkach. Na szczęście mamy kilka wzorów, które nam to bardzo ułatwiają.

Funkcja pochodna

Obliczanie funkcji pochodnej może być czasochłonne w bardzie złożonych przypadkach. Na szczęście mamy kilka wzorów, które nam to bardzo ułatwiają. Teraz je przedstawimy.

Wzór 1

Jeśli $f(x) = c$, gdzie c to stała, to $f'(x) = 0$.

Wzór 1

Jeśli $f(x) = c$, gdzie c to stała, to $f'(x) = 0$.

Ten wzór jest oczywisty. Funkcja stała w każdym punkcie będzie miała pochodną równą 0 (gdyż pochodna opisuje zmianę/nachylenie funkcji)

Wzór 2

Jeśli $f(x) = x^{\alpha}$, to $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Wzór 2

Jeśli $f(x) = x^{\alpha}$, to $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Ten wzór już nie jest oczywisty. Widzieliśmy jednak już dwa jego przejawy.

Wzór 2

Jeśli $f(x) = x^\alpha$, to $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Ten wzór już nie jest oczywisty. Widzieliśmy jednak już dwa jego przejawy.

Jeśli $f(x) = x^2$, to przypadek, gdy $\alpha = 2$, czyli

$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$

Wzór 2

Jeśli $f(x) = x^{\alpha}$, to $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Ten wzór już nie jest oczywisty. Widzieliśmy jednak już dwa jego przejawy.

Jeśli $f(x) = x^2$, to przypadek, gdy $\alpha = 2$, czyli

$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$

Jeśli $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, to przypadek, gdy $\alpha = -1$, czyli

$$f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Wzór 2

Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

Wzór 2

Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

a) $f(x) = x^5$.

Wzór 2

Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

a) $f(x) = x^5$. Mamy $\alpha = 5$, czyli

$$f'(x) = 5x^4$$

Wzór 2

Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

a) $f(x) = x^5$. Mamy $\alpha = 5$, czyli

$$f'(x) = 5x^4$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Wzór 2

Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

a) $f(x) = x^5$. Mamy $\alpha = 5$, czyli

$$f'(x) = 5x^4$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$. Możemy zapisać $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, czyli

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Wzór 2

Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

a) $f(x) = x^5$. Mamy $\alpha = 5$, czyli

$$f'(x) = 5x^4$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$. Możemy zapisać $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, czyli

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Wzór 2

Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

a) $f(x) = x^5$. Mamy $\alpha = 5$, czyli

$$f'(x) = 5x^4$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$. Możemy zapisać $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, czyli

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Możemy zapisać $f(x) = x^{-3}$, czyli

$$f'(x) = -3x^{(-3-1)} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

Drobna uwaga dotycząca zapisu. Niech $f(x) = x^3$.

Drobna uwaga dotycząca zapisu. Niech $f(x) = x^3$. Poniższe zapisy są równoważne:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

Wzór 3

Jeśli $f(x) = c \cdot g(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ (czyli c jest stałą), to $f'(x) = c \cdot g'(x)$

Wzór 3

Jeśli $f(x) = c \cdot g(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ (czyli c jest stałą), to $f'(x) = c \cdot g'(x)$

Tu sprawa jest prosta:

Wzór 3

Jeśli $f(x) = c \cdot g(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ (czyli c jest stałą), to $f'(x) = c \cdot g'(x)$

Tu sprawa jest prosta:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot g(x + \Delta x) - c \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = c \cdot g'(x)$$

Wzór 3

a) $f(x) = 3x^4$.

Wzór 3

a) $f(x) = 3x^4$.

$$f'(x) = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$$

Wzór 3

a) $f(x) = 3x^4$.

$$f'(x) = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$$

b) $f(x) = -\dfrac{2}{x^2}$.

Wzór 3

a) $f(x) = 3x^4$.

$$f'(x) = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$$

b) $f(x) = -\frac{2}{x^2}$. Możemy zapisać $f(x) = -2x^{-2}$, czyli

$$f'(x) = -2 \cdot (x^{-2})' = -2 \cdot (-2x^{-3}) = 4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

Wzór 3

a) $f(x) = 3x^4$.

$$f'(x) = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$$

b) $f(x) = -\frac{2}{x^2}$. Możemy zapisać $f(x) = -2x^{-2}$, czyli

$$f'(x) = -2 \cdot (x^{-2})' = -2 \cdot (-2x^{-3}) = 4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

c) $f(x) = 6\sqrt[3]{x}$.

Wzór 3

a) $f(x) = 3x^4$.

$$f'(x) = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$$

b) $f(x) = -\dfrac{2}{x^2}$. Możemy zapisać $f(x) = -2x^{-2}$, czyli

$$f'(x) = -2 \cdot (x^{-2})' = -2 \cdot (-2x^{-3}) = 4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

c) $f(x) = 6\sqrt[3]{x}$. Możemy zapisać $f(x) = 6x^{\frac{1}{3}}$, czyli

$$f'(x) = 6 \cdot (x^{\frac{1}{3}})' = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Wzór 4

Jeśli $f(x) = g(x) \pm j(x)$, to $f'(x) = g'(x) \pm j'(x)$

Wzór 4

Jeśli $f(x) = g(x) \pm j(x)$, to $f'(x) = g'(x) \pm j'(x)$

Tu znów sprawa jest prosta:

Wzór 4

Jeśli $f(x) = g(x) \pm j(x)$, to $f'(x) = g'(x) \pm j'(x)$

Tu znów sprawa jest prosta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) \pm j(x+\Delta x) - g(x) \mp j(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{j(x+\Delta x) - j(x)}{\Delta x} = \\ &= g'(x) \pm j'(x) \end{aligned}$$

Wzór 4

a) $f(x) = x^6 + x^7$.

Wzór 4

a) $f(x) = x^6 + x^7$.

$$f'(x) = (x^6)' + (x^7)' = 6x^5 + 7x^6$$

Wzór 4

a) $f(x) = x^6 + x^7$.

$$f'(x) = (x^6)' + (x^7)' = 6x^5 + 7x^6$$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$

$$f'(x) = (2x^2)' - (3x^3)' + (4x^4)' = 4x - 9x^2 + 16x^3$$

Tutaj oczywiście zastosowaliśmy również trzeci (i drugi) wzór (ale już bez rozpisywania).

Wzór 4

a) $f(x) = x^6 + x^7$.

$$f'(x) = (x^6)' + (x^7)' = 6x^5 + 7x^6$$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$

$$f'(x) = (2x^2)' - (3x^3)' + (4x^4)' = 4x - 9x^2 + 16x^3$$

Tutaj oczywiście zastosowaliśmy również trzeci (i drugi) wzór (ale już bez rozpisywania).

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 7$.

Wzór 4

a) $f(x) = x^6 + x^7$.

$$f'(x) = (x^6)' + (x^7)' = 6x^5 + 7x^6$$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$

$$f'(x) = (2x^2)' - (3x^3)' + (4x^4)' = 4x - 9x^2 + 16x^3$$

Tutaj oczywiście zastosowaliśmy również trzeci (i drugi) wzór (ale już bez rozpisywania).

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 7$. Możemy zapisać $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 7$, otrzymujemy:

$$f'(x) = (2x^{\frac{1}{2}})' - (\frac{1}{2}x^2)' + (7)' = \frac{1}{\sqrt{x}} - x$$

Tym razem zastosowaliśmy wszystkie 4 wzory.

Na zajęciach dodamy do tego jeszcze dwa wzory, ale te cztery proszę potrenować jeszcze przed zajęciami.

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź:

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$.

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3}$. Odpowiedź:

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}$

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$.

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$. Odpowiedź:

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

d) $f(x) = 5x - 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

d) $f(x) = 5x - 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Odpowiedź:

Przykłady

Oblicz funkcję pochodną dla poniższych funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$. Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

d) $f(x) = 5x - 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Odpowiedź: $f'(x) = 5 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$