Granice niewłaściwe

Wprowadzenie

Na zajęciach omawialiśmy przykład funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i ustaliliśmy, że

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

oraz

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Wprowadzenie

Granicę niewłaściwą w ∞ lub $-\infty$ będziemy mieli wtedy, gdy licznik ułamka dąży do liczby różnej od 0, a mianownik dąży do 0. Czy dana granica wynosi ∞ czy $-\infty$ zależy od znaku licznika i mianownika.

Wprowadzenie

Granicę niewłaściwą w ∞ lub $-\infty$ będziemy mieli wtedy, gdy licznik ułamka dąży do liczby różnej od 0, a mianownik dąży do 0. Czy dana granica wynosi ∞ czy $-\infty$ zależy od znaku licznika i mianownika.

Wprowadzę następujące oznaczenia $\left[\frac{1}{0^+}\right]$, by oznaczyć, że dzielę przez liczbę dążącą do 0, ale większą od 0 (dodatnią) i $\left[\frac{1}{0^-}\right]$ by oznaczyć, że dzielę przez liczbę dążącą do 0, ale mniejszą od 0 (ujemną).

Wprowadzenie

Granicę niewłaściwą w ∞ lub $-\infty$ będziemy mieli wtedy, gdy licznik ułamka dąży do liczby różnej od 0, a mianownik dąży do 0. Czy dana granica wynosi ∞ czy $-\infty$ zależy od znaku licznika i mianownika.

Wprowadzę następujące oznaczenia $\left[\frac{1}{0^+}\right]$, by oznaczyć, że dzielę przez liczbę dążącą do 0, ale większą od 0 (dodatnią) i $\left[\frac{1}{0^-}\right]$ by oznaczyć, że dzielę przez liczbę dążącą do 0, ale mniejszą od 0 (ujemną). **Uwaga: to jest tylko pomocniczy zapis**

Wprowadzenie

Jeśli w liczniku występuje liczba dodatnia i dzielę przez liczbę dążącą do 0^+, to otrzymuję ∞.

Wprowadzenie

Jeśli w liczniku występuje liczba dodatnia i dzielę przez liczbę dążącą do 0^+, to otrzymuję ∞.

Jeśli w liczniku występuje liczba dodatnia i dzielę przez liczbę dążącą do 0^-, to otrzymuję $-\infty$.

Wprowadzenie

Jeśli w liczniku występuje liczba dodatnia i dzielę przez liczbę dążącą do 0^+, to otrzymuję ∞.

Jeśli w liczniku występuje liczba dodatnia i dzielę przez liczbę dążącą do 0^-, to otrzymuję $-\infty$.

Jeśli w liczniku występuje liczba ujemna i dzielę przez liczbę dążącą do 0^+, to otrzymuję $-\infty$.

Wprowadzenie

Jeśli w liczniku występuje liczba dodatnia i dzielę przez liczbę dążącą do 0^+, to otrzymuję ∞.

Jeśli w liczniku występuje liczba dodatnia i dzielę przez liczbę dążącą do 0^-, to otrzymuję $-\infty$.

Jeśli w liczniku występuje liczba ujemna i dzielę przez liczbę dążącą do 0^+, to otrzymuję $-\infty$.

Jeśli w liczniku występuje liczba ujemna i dzielę przez liczbę dążącą do 0^-, to otrzymuję ∞.

Wprowadzenie

W przypadku funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ możemy zapisać:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \overset{\left[1/0^+\right]}{=} \infty$$

oraz

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \overset{\left[1/0^-\right]}{=} -\infty$$

Na kolejnych slajdach zrobimy kilka przykładów ze zbioru.

2.30

c) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -4} \frac{2x+5}{(x+4)^2}$.

2.30

c) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -4} \frac{2x+5}{(x+4)^2}$.

Licznik dąży do -3, natomiast mianownik dąży do 0, ale zawsze jest większy od 0 (czyli 0^+).

2.30

c) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -4} \frac{2x+5}{(x+4)^2}$.

Licznik dąży do -3, natomiast mianownik dąży do 0, ale zawsze jest większy od 0 (czyli 0^+). Zauważcie, że nie ma znaczenia, czy dążę do -4^- czy -4^+.

2.30

c) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to -4} \frac{2x+5}{(x+4)^2}$.

Licznik dąży do -3, natomiast mianownik dąży do 0, ale zawsze jest większy od 0 (czyli 0^+). Zauważcie, że nie ma znaczenia, czy dążę do -4^- czy -4^+. Czyli:

$$\lim_{x\to -4} \frac{2x+5}{(x+4)^2} \overset{\left[{}^{-3}/_{0^+}\right]}{=} -\infty$$

2.30

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{|3-5x|}{|7-x|}$.

2.30

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to 7} \frac{|3-5x|}{|7-x|}$.

Licznik dąży do 32, natomiast mianownik dąży do 0, ale zawsze jest większy od 0 (czyli 0^+).

2.30

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{|3-5x|}{|7-x|}$.

Licznik dąży do 32, natomiast mianownik dąży do 0, ale zawsze jest większy od 0 (czyli 0^+). Znów nie ma znaczenia, czy dążę do 7^- czy 7^+.

2.30

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to 7} \frac{|3-5x|}{|7-x|}$.

Licznik dąży do 32, natomiast mianownik dąży do 0, ale zawsze jest większy od 0 (czyli 0^+). Znów nie ma znaczenia, czy dążę do 7^- czy 7^+. Czyli:

$$\lim_{x \to 7} \frac{|3-5x|}{|7-x|} \overset{\left[{}^{32}/_{0^+}\right]}{=} \infty$$

2.35

a) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 3}{x}$.

2.35

a) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+3}{x}$.

Licznik dąży do 3, natomiast mianownik dąży do 0, ale od prawej strony (czyli 0^+).

2.35

a) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+3}{x}$.

Licznik dąży do 3, natomiast mianownik dąży do 0, ale od prawej strony (czyli 0^+). Czyli:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+3}{x} \stackrel{\left[3/0^+\right]}{=} \infty$$

2.35

b) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 3}{x}$.

2.35

b) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+3}{x}$.

Licznik ciągle dąży do 3, natomiast mianownik dąży do 0, ale tym razem od lewej strony (czyli 0^-).

2.35

b) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2+3}{x}$.

Licznik ciągle dąży do 3, natomiast mianownik dąży do 0, ale tym razem od lewej strony (czyli 0^-). Czyli:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+3}{x} \overset{\left[3/0^-\right]}{=} -\infty$$

2.35

e) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{-x^2+1}{x+3}$.

2.35

e) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{-x^2+1}{x+3}$.

Licznik dąży do -8, mianownik dąży do 0, ale jest dodatni (czyli 0^+).

2.35

e) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{-x^2+1}{x+3}$.

Licznik dąży do -8, mianownik dąży do 0, ale jest dodatni (czyli 0^+). Czyli:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{-x^2+1}{x+3} \overset{\left[-{}^{8}/_{0^+}\right]}{=} -\infty$$

2.36

c) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{4x+21}{(x+2)^2}$.

2.36

c) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{4x+21}{(x+2)^2}$.

Licznik dąży do 13, mianownik dąży do 0 i jest dodatni (czyli 0^+).

2.36

c) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{4x+21}{(x+2)^2}$.

Licznik dąży do 13, mianownik dąży do 0 i jest dodatni (czyli 0^+). Czyli:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{4x+21}{(x+2)^2} \overset{\left[{}^{13}/_{0^+}\right]}{=} \infty$$

Omówimy teraz zadania 2.31-2.34.

Omówimy teraz zadania 2.31-2.34. One są jeszcze prostsze.

2.31

a) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to \infty}(x^3 - 5x^2 + 3x - 7)$.

2.31

a) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to \infty} (x^3 - 5x^2 + 3x - 7)$.

Wyciągniemy x^3 przed nawias:

2.31

a) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 5x^2 + 3x - 7)$.

Wyciągniemy x^3 przed nawias:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 5x^2 + 3x - 7) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)$$

2.31

a) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 5x^2 + 3x - 7)$.

Wyciągniemy x^3 przed nawias:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 5x^2 + 3x - 7) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)$$

Wyrażenia w nawiasie, poza pierwszym, dążą do 0, czyli cały nawias dąży do 1:

2.31

a) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 5x^2 + 3x - 7)$.

Wyciągniemy x^3 przed nawias:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 5x^2 + 3x - 7) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)$$

Wyrażenia w nawiasie, poza pierwszym, dążą do 0, czyli cały nawias dąży do 1:

$$\lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Jeśli x dąży do ∞, to x^3 również.

2.31

d) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^5 + 2x^4 + x + 1)$.

2.31

d) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} (-3x^5 + 2x^4 + x + 1)$.

Wyciągniemy x^5 przed nawias:

2.31

d) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^5 + 2x^4 + x + 1)$.

Wyciągniemy x^5 przed nawias:

$$\lim_{x \to -\infty} (-3x^5 + 2x^4 + x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^5 \left(-3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)$$

2.31

d) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+2x^4+x+1)$.

Wyciągniemy x^5 przed nawias:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^5+2x^4+x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$$

Znów większość wyrażeń w nawiasie dązy, do 0, a cały nawias do -3, czyli mamy:

2.31

d) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to-\infty}(-3x^5+2x^4+x+1)$.

Wyciągniemy x^5 przed nawias:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^5+2x^4+x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$$

Znów większość wyrażeń w nawiasie dązy, do 0, a cały nawias do -3, czyli mamy:

$$\lim_{x\to-\infty}x^5\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)=\lim_{x\to-\infty}-3x^5=\infty$$

Jeśli x dąży do $-\infty$, to x^5 również, ale mnożymy jeszcze przez -3.

2.31

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 10)$.

2.31

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 10)$.

Wyciągamy x^4 przed nawias:

2.31

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 10)$.

Wyciągamy x^4 przed nawias:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 10) = \lim_{x \to -\infty} x^4 \left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} - \frac{10}{x^4}\right)$$

2.31

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to-\infty}(x^4+7x^3-8x^2-10)$.

Wyciągamy x^4 przed nawias:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4+7x^3-8x^2-10)=\lim_{x\to-\infty}x^4\left(1+\frac{7}{x}-\frac{8}{x^2}-\frac{10}{x^4}\right)$$

Cały nawias dązy do 1, czyli:

2.31

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+7x^3-8x^2-10)$.

Wyciągamy x^4 przed nawias:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4+7x^3-8x^2-10)=\lim_{x\to-\infty}x^4\left(1+\frac{7}{x}-\frac{8}{x^2}-\frac{10}{x^4}\right)$$

Cały nawias dązy do 1, czyli:

$$\lim_{x\to-\infty}x^4\left(1+\frac{7}{x}-\frac{8}{x^2}-\frac{10}{x^4}\right)=\lim_{x\to-\infty}x^4=\infty$$

Jeśli x dąży do $-\infty$, to x^4 dąży do ∞ (bo mamy parzystą potęgę).

2.32

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to -\infty}[(9-2x)^3(7-x)^3]$.

2.32

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} [(9-2x)^3(7-x)^3]$.

Wyciągniemy z obu nawiasów x (i od razu podniesiemy do 3 potęgi):

2.32

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} [(9-2x)^3(7-x)^3]$.

Wyciągniemy z obu nawiasów x (i od razu podniesiemy do 3 potęgi):

$$\lim_{x \to -\infty} [(9-2x)^3(7-x)^3] = \lim_{x \to -\infty} \left[x^3 \left(\frac{9}{x} - 2 \right)^3 x^3 \left(\frac{7}{x} - 1 \right)^3 \right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[x^6 \left(\frac{9}{x} - 2 \right)^3 \left(\frac{7}{x} - 1 \right)^3 \right]$$

2.32

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to-\infty}[(9-2x)^3(7-x)^3]$.

Wyciągniemy z obu nawiasów x (i od razu podniesiemy do 3 potęgi):

$$\lim_{x\to-\infty}[(9-2x)^3(7-x)^3] = \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{9}{x}-2\right)^3 x^3\left(\frac{7}{x}-1\right)^3\right] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^6\left(\frac{9}{x}-2\right)^3\left(\frac{7}{x}-1\right)^3\right]$$

Pierwszy nawias dązy do -2 (ale podnosimy do 3 potęgi), drugi do -1 (i znów podnosimy do 3 potęgi):

2.32

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to-\infty}[(9-2x)^3(7-x)^3]$.

Wyciągniemy z obu nawiasów x (i od razu podniesiemy do 3 potęgi):

$$\lim_{x\to-\infty}[(9-2x)^3(7-x)^3] = \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{9}{x}-2\right)^3 x^3\left(\frac{7}{x}-1\right)^3\right] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^6\left(\frac{9}{x}-2\right)^3\left(\frac{7}{x}-1\right)^3\right]$$

Pierwszy nawias dązy do -2 (ale podnosimy do 3 potęgi), drugi do -1 (i znów podnosimy do 3 potęgi):

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^6\left(\frac{9}{x}-2\right)^3\left(\frac{7}{x}-1\right)^3\right] = \lim_{x\to-\infty} 8x^6 = \infty$$

Jeśli x dąży do $-\infty$, to x^6 dąży do ∞ (bo mamy parzystą potęgę).

2.33

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 + x^3 + x^2 - 5}{x^2 - 2x + 8}$.

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^4 + x^3 + x^2 - 5}{x^2 - 2x + 8}$.

Wyciągniemy z licznika i mianownika najwyższe potęgi x:

2.33

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}$.

Wyciągniemy z licznika i mianownika najwyższe potęgi x:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4})}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x})} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4})}{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x}}$$

2.33

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}$.

Wyciągniemy z licznika i mianownika najwyższe potęgi x:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4)}}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x})} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4)}}{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x}}$$

Mianownik dąży do 1, nawias w liczniku do 5, czyli mamy:

2.33

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}$.

Wyciągniemy z licznika i mianownika najwyższe potęgi x:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4)}}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x})}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4)}}{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x}}$$

Mianownik dąży do 1, nawias w liczniku do 5, czyli mamy:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4)}}{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x}}=\lim_{x\to-\infty}5x^2=\infty$$

Jeśli x dąży do $-\infty$, to $5x^2$ dąży do ∞ (mamy parzystą potęgę).

2.34

b) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 15}$.

2.34

b) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 15}$.

Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module):

2.34

b) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 15}$.

Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module):

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 15} = \lim_{x \to -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{15}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{15}{x^2}}$$

2.34

b) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+7x+15}$.

Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module):

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+7x+15} = \lim_{x \to -\infty} |x|\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{15}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{15}{x^2}}$$

x dązy do $-\infty$, więc opuszczając moduł zmieniamy znak.

2.34

b) Chcemy obliczyć $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+7x+15}$.

Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module):

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+7x+15}=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{15}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{15}{x^2}}$$

x dązy do $-\infty$, więc opuszczając moduł zmieniamy znak. Wyrażenie pod pierwiastkiem dązy do 1, czyli:

2.34

b) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 15}$.

Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module):

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 15} = \lim_{x \to -\infty} |x|\sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{15}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{15}{x^2}}$$

x dązy do $-\infty$, więc opuszczając moduł zmieniamy znak. Wyrażenie pod pierwiastkiem dązy do 1, czyli:

$$\lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{15}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} -x = \infty$$

Jeśli x dąży do $-\infty$, to $-x$ dąży oczywiście do ∞.

2.34

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x\sqrt{x^2 - x + 3}}{4 - 5x}$.

2.34

f) Chcemy obliczyć $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x\sqrt{x^2 - x + 3}}{4 - 5x}$.
Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module), ponadto wyciągniemy x z mianownika:

2.34

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$.

Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module), ponadto wyciągniemy x z mianownika:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(\frac{4}{x}-5)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{(\frac{4}{x}-5)}$$

2.34

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$.

Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module), ponadto wyciągniemy x z mianownika:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(\frac{4}{x}-5)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{(\frac{4}{x}-5)}$$

Skróciliśmy x i opuściliśmy moduł (zmieniając znak, gdyż x dąży do $-\infty$).

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$.
Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module), ponadto wyciągniemy x z mianownika:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(\frac{4}{x}-5)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{(\frac{4}{x}-5)}$$

Skróciliśmy x i opuściliśmy moduł (zmieniając znak, gdyż x dąży do $-\infty$). Mianownik dąży do -5, pierwiastek do 1, czyli:

2.34

f) Chcemy obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$.
Wyciągamy pod pierwiastkiem x^2 i wyrzucamy przed pierwiastek (pamiętając o module), ponadto wyciągniemy x z mianownika:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(\frac{4}{x}-5)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{(\frac{4}{x}-5)}$$

Skróciliśmy x i opuściliśmy moduł (zmieniając znak, gdyż x dąży do $-\infty$).
Mianownik dąży do -5, pierwiastek do 1, czyli:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{(\frac{4}{x}-5)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{5}x=-\infty$$

Jeśli x dąży do $-\infty$, to $\frac{2}{5}x$ również.

Na wejściówce będzie zadanie podobne do powyższych. Warto zrobić pozostałe przykłady z zadań 2.30-2.35.