Odpowiedzi

Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

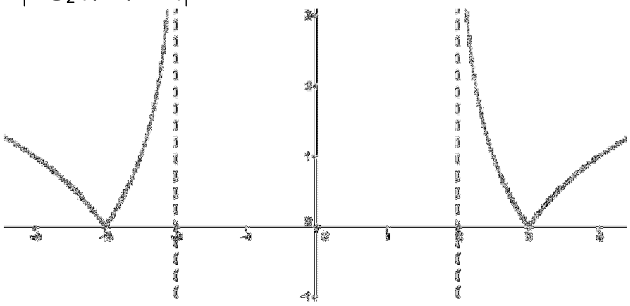
Praca klasowa nr 1, grupa A

1.	Obliczenie $a = 2^{\frac{9}{24}} = 2^{\frac{3}{8}}$.	2 pkt	6 pkt
	Obliczenie $b = 2^{\frac{41}{12}}$.	2 pkt	
	Obliczenie $\log_a b = 9\frac{1}{9}$.	2 pkt	
2.	a) Podanie wzoru funkcji $f(x) = 3^x + 1$, z uzasadnieniem.	2 pkt	6 pkt
	b) Ułożenie i rozwiązanie nierówności: $3^x + 1 \leq 28 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3\rangle$.	2 pkt	
	c) Obliczenie $g\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + 1$ i zapisanie liczby w postaci: $1 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$.	2 pkt	
3.	Zapisanie i rozwiązanie nierówności: $\frac{x-2}{3-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$.	2 pkt	6 pkt
	Zapisanie i rozwiązanie nierówności: $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{x-2}{3-x}\right) - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2\frac{1}{8}) \cup (3, +\infty)$.	3 pkt	
	Wyznaczenie dziedziny $D = (2, 2\frac{1}{8})$.	1 pkt	
4.	Zapisanie warunku: $(5^{\lvert x\rvert})^2 = 25^{\lvert x+2\rvert} \cdot 5^4$.	1 pkt	6 pkt
	Skorzystanie z różnowartościowości funkcji wykładniczej i przejście do równania: $\lvert x + 2\rvert = \lvert x\rvert - 2$	2 pkt	
	Rozwiązanie każdego z trzech przypadków równania z wartością bezwzględną.	2 pkt	
	Zapisanie odpowiedzi: $x \in (-\infty, -2\rangle$.	1 pkt	
5.	Wyznaczenie dziedziny równania: $D = (0, +\infty)$.	1 pkt	6 pkt
	Wykorzystanie własności logarytmów do zapisania równania w postaci: $x(x + 1)^2 = x^2$.	2 pkt	
	Zapisanie lewej strony równania w postaci iloczynu: $x(x^2 + x + 1) = 0$ i wywnioskowanie, że $x = 0 \notin D$, wyrażenie $x^2 + x + 1$ przyjmuje zawsze wartości dodatnie.	2 pkt	
	Odrzucenie rozwiązania, bo $0 \notin D$	1 pkt	

Praca klasowa nr 1, grupa B

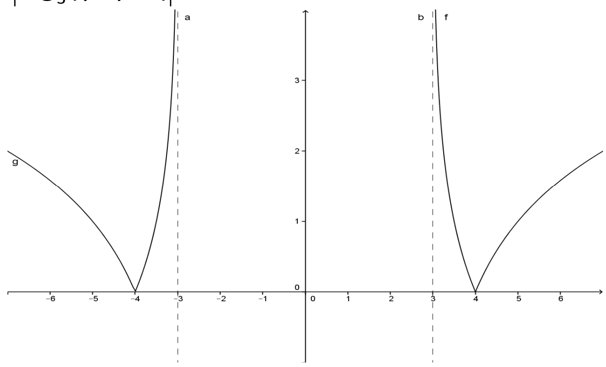
1.	Obliczenie $a = 3^{\frac{9}{24}}$.	2 pkt	6 pkt
	Obliczenie $b = 3^{\frac{41}{12}}$.	2 pkt	
	Obliczenie $\log_a b = 9\frac{1}{9}$.	2 pkt	
2.	a) podanie wzoru funkcji $f(x) = 2^x + 1$, z uzasadnieniem.	2 pkt	6 pkt
	b) ułożenie i rozwiązanie nierówności: $2^x + 1 \geq 65 \Leftrightarrow x \in \langle 6, +\infty)$.	2 pkt	
	c) obliczenie $g\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + 1$ i zapisanie liczby w postaci: $1 + \frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$.	2 pkt	
3.	Zapisanie i rozwiązanie nierówności: $\frac{3-x}{x-4} > 0 \Leftrightarrow x \in (3, 4)$.	2 pkt	6 pkt
	Zapisanie i rozwiązanie nierówności: $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3-x}{x-4}\right) - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3\frac{1}{6}) \cup (4, +\infty)$.	3 pkt	
	Wyznaczenie dziedziny: $D = (3, 3\frac{1}{6})$.	1 pkt	
4.	Zapisanie warunku: $(7^{\lvert x \rvert})^2 = 49^{\lvert x+3 \rvert} \cdot 7^6$.	1 pkt	6 pkt
	Skorzystanie z różnowartościowości funkcji wykładniczej i przejście do równania: $\lvert x + 3 \rvert = \lvert x \rvert - 3$.	2 pkt	
	Rozwiązanie każdego z trzech przypadków równania z wartością bezwzględną.	2 pkt	
	Zapisanie odpowiedzi: $x \in (-\infty, -3\rangle$.	1 pkt	
5.	Wyznaczenie dziedziny równania: $D = (0, +\infty)$.	1 pkt	6 pkt
	Wykorzystanie własności logarytmów do zapisania równania w postaci: $x(x + 2)^2 = x^3$.	2 pkt	
	Zapisanie równania w postaci: $4x^2 + 4x = 0$ oraz wyznaczenie: $x = 0 \notin D$, $x = -1 \notin D$.	2 pkt	
	Odrzucenie rozwiązania, bo $0 \notin D$, $-1 \notin D$.	1 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa A

1.	a) Wyznaczenie dziedziny $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.	2 pkt	6 pkt
	b) Przekształcenie wzoru funkcji, np. do postaci $f(x) = \left\|\log_2(\|x\|-2)\right\|$ i narysowanie wykresu. 	4 pkt	
2.	Zapisanie równania w postaci $2^{\cos x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{8}\cos x + \ldots} = 2$.	2 pkt	6 pkt
	Zauważenie, że wykładnik tworzy szereg geometryczny zbieżny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ i obliczenie sumy tego szeregu $S = 2\cos x$.	2 pkt	
	Rozwiązanie równania $\cos x = \frac{1}{2}$ w zadanym przedziale: $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{5\pi}{3}$.	2 pkt	
3.	Określenie dziedziny nierówności: $D = \boldsymbol{R}_+$, wprowadzenie pomocniczej niewiadomej i zapisanie nierówności wielomianowej z nową zmienną.	2 pkt	8 pkt
	Wyznaczenie pierwiastków wielomianu i rozwiązanie nierówności $(t + 1)(t - 2)^2 \le 0$: $t \in (-\infty, -1\rangle \cup \{2\}$.	3 pkt	
	Rozwiązanie nierówności logarytmicznej $\log_5 x \le -1$ i równania logarytmicznego $\log_5 x = 2$. Zapisanie odpowiedzi $x \in (0, \frac{1}{5}\rangle \cup \{25\}$.	3 pkt	
4.	Określenie zbioru wartości funkcji $g(x) = x^2 - 2x$ w przedziale $\langle 0, 4\rangle$; $ZW_g = \langle -1, 8\rangle$	3 pkt	6 pkt
	Obliczenie $f(1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} = \sqrt{2}$ i $f(4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{8} = \frac{1}{16}$.	2 pkt	
	Powołanie się na monotoniczność funkcji wykładniczej i zapisanie odpowiedzi $ZW_f = \left\langle \frac{1}{16}, \sqrt{2} \right\rangle$.	1 pkt	

5.	Zapisanie lewej strony nierówności w postaci: $\log_7 6 + \log_7 8 = \log_7 48$.	2 pkt	4 pkt
	Zapisanie prawej strony nierówności w postaci: $2 = \log_7 49$ i uzasadnienie, że nierówność jest prawdziwa.	2 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa B

1.	a) Wyznaczenie dziedziny $D_f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$	2 pkt	6 pkt
	b) Przekształcenie wzoru funkcji, np. do postaci $f(x) = \left\|\log_3(\|x\|-3)\right\|$ i narysowanie wykresu: 	4 pkt	
2.	Zapisanie równania w postaci $3^{\sin x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{8}\sin x + \ldots} = 3$.	2 pkt	6 pkt
	Zauważenie, że wykładnik tworzy szereg geometryczny zbieżny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ i obliczenie sumy tego szeregu $S = 2\sin x$.	2 pkt	
	Rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w zadanym przedziale: $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{5\pi}{6}$.	2 pkt	
3.	Określenie dziedziny nierówności: $D = \boldsymbol{R}_+$, wprowadzenie pomocniczej niewiadomej i zapisanie nierówności wielomianowej z nową zmienną.	2 pkt	8 pkt
	Wyznaczenie pierwiastków wielomianu i rozwiązanie nierówności $(t-1)(t+2)^2 < 0$: $t \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1)$.	3 pkt	
	Rozwiązanie nierówności logarytmicznej $\log_7 x < 1$ i równania logarytmicznego $\log_7 x \neq -2$. Zapisanie odpowiedzi $x \in (0, \frac{1}{49}) \cup (\frac{1}{49}, 7)$.	3 pkt	

4.	Określenie zboru wartości funkcji $g(x) = x^2 + 2x$ w przedziale $\langle -4, 0\rangle$; $ZW_g = \langle 1, 8\rangle$.	3 pkt	6 pkt
	Obliczenie $f(-1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^1 = \frac{\sqrt{3}}{81}$ i $f(-4) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^8 = \frac{1}{81}$.	2 pkt	
	Powołanie się na monotoniczność funkcji wykładniczej i zapisanie odpowiedzi $ZW_f = \left\langle \frac{1}{81}, \sqrt{3} \right\rangle$.	1 pkt	
5.	Zapisanie lewej strony nierówności w postaci $\log_5 4 + \log_5 6 = \log_5 24$.	2 pkt	4 pkt
	Zapisanie prawej strony nierówności w postaci: $2 = \log_5 25$ i uzasadnienie, że nierówność jest prawdziwa.	2 pkt	