# Największa wartość funkcji w przedziale

Na tej prezentacji omówimy zadania 2.104, 2.105 i 2.106. Rozwiążemy przykłady (b) i (d) z każdego z tych zadań.

Na tej prezentacji omówimy zadania 2.104, 2.105 i 2.106. Rozwiążemy przykłady (b) i (d) z każdego z tych zadań. Proszę samodzielenie rozwiązać przykłądy (a) i (c).

# 2.104 b

Dana jest funkcja $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5$ oraz przedział $\langle -1, 2 \rangle$

# 2.104 b

Dana jest funkcja $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5$ oraz przedział $\langle -1, 2 \rangle$

Chcemy znaleźć największą i najmniejszą wartość tej funkcji w zadanym przedziale.

# 2.104 b

Dana jest funkcja $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5$ oraz przedział $\langle -1, 2 \rangle$

Chcemy znaleźć największą i najmniejszą wartość tej funkcji w zadanym przedziale. Znajdziemy ekstrema lokalne. W tym celu szukamy punktów krytycznych, czyli punktów, w których pochodna jest 0 lub jest niezdefiniowana. W naszym przykładzie funkcja jest wielomianem, czyli będzie miała pochodną w każdym punkcie.

# 2.104 b

Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

i rozwiązujemy $f'(x) = 0$:

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$$
$$12x(x-1)^2 = 0$$

# 2.104 b

Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

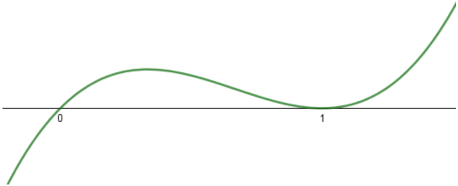
i rozwiązujemy $f'(x) = 0$:

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$$
$$12x(x-1)^2 = 0$$

Czyli mamy dwa punkty krytyczne: dla $x = 0$ oraz dla $x = 1$.

# 2.104 b

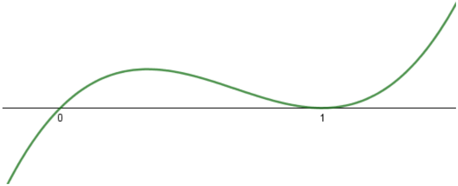
Szkicujemy wykres pochodnej:




i odczytujemy z niego, że dla $x = 0$ mamy lokalne minimum, natomiast w $x = 1$ nie ma ekstremum.

# 2.104 b

Szkicujemy wykres pochodnej:




i odczytujemy z niego, że dla $x = 0$ mamy lokalne minimum, natomiast w $x = 1$ nie ma ekstremum.

Tutaj krótkie powtórzenie: w $x = 0$ jest minimum, gdyż na lewo od 0 pochodna jest ujemna, czyli funkcja maleje, a na prawo od 0 pochodna jest dodatnia, czyli funkcja rośnie. Skoro funkcja najpierw malała, a później zaczęła rosnąć, to musieliśmy mieć lokalne minimum.

# 2.104 b

Obliczamy $f(0)$, a także wartości na krańcach przedziału, czyli $f(-1)$ oraz $f(2)$.

# 2.104 b

Obliczamy $f(0)$, a także wartości na krańcach przedziału, czyli $f(-1)$ oraz $f(2)$.
Mamy:

$$f(0) = -5$$
$$f(-1) = 12$$
$$f(2) = 3$$

# 2.104 b

Obliczamy $f(0)$, a także wartości na krańcach przedziału, czyli $f(-1)$ oraz $f(2)$.
Mamy:

$$f(0) = -5$$
$$f(-1) = 12$$
$$f(2) = 3$$

Czyli najmniejsza wartość funkcji w danym przedziale to $-5$, zaś największa to 12.

# 2.104 d

Teraz mamy funkcję $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$ oraz przedział $\langle -1, 3 \rangle$.

# 2.104 d

Teraz mamy funkcję $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$ oraz przedział $\langle -1, 3 \rangle$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

# 2.104 d

Teraz mamy funkcję $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$ oraz przedział $\langle -1, 3 \rangle$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

## 2.104 d

Teraz mamy funkcję $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$ oraz przedział $\langle -1, 3\rangle$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Rozwiązujemy równanie:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$$
$$x^2(x-2)^2 = 0$$

# 2.104 d

Teraz mamy funkcję $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$ oraz przedział $\langle -1, 3 \rangle$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Rozwiązujemy równanie:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$$
$$x^2(x-2)^2 = 0$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania $x = 0$ lub $x = 2$.

# 2.104 d

Teraz mamy funkcję $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$ oraz przedział $\langle -1, 3 \rangle$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

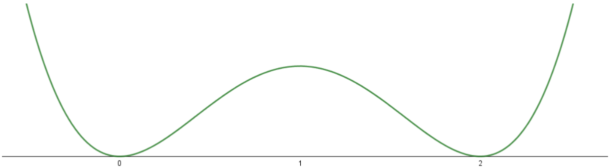
Rozwiązujemy równanie:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$$
$$x^2(x-2)^2 = 0$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania $x = 0$ lub $x = 2$. Mamy dwa punkty krytyczne.

# 2.104 d

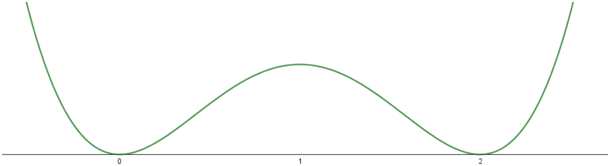
Szkicujemy wykres pochodnej:




i odczytujemy z niego, że funkcja nie ma ekstremów.

# 2.104 d

Szkicujemy wykres pochodnej:




i odczytujemy z niego, że funkcja nie ma ekstremów. Pochodna jest zawsze nieujemna, a więc funkcja będzie zawsze niemalejąca.

# 2.104 d

Nie ma ekstremów, więc obliczamy jedynie wartości na krańcach przedziału

# 2.104 d

Nie ma ekstremów, więc obliczamy jedynie wartości na krańcach przedziału Mamy:

$$f(-1) = -3\frac{8}{15}$$
$$f(3) = 2\frac{3}{5}$$

# 2.104 d

Nie ma ekstremów, więc obliczamy jedynie wartości na krańcach przedziału Mamy:

$$f(-1) = -3\frac{8}{15}$$
$$f(3) = 2\frac{3}{5}$$

Czyli najmniejsza wartość funkcji w danym przedziale to $-3\frac{8}{15}$, zaś największa to $2\frac{3}{5}$.

# 2.105 b

$f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$ oraz przedział $\langle -5, 3)$.

## 2.105 b

$f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$ oraz przedział $\langle -5, 3)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

# 2.105 b

$f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$ oraz przedział $\langle -5, 3)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji. Pojawiła się pewna komplikacja w postaci przedziału otwartego. Zaraz zobaczymy, jak sobie z tym radzić.

## 2.105 b

$f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$ oraz przedział $\langle -5, 3)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji. Pojawiła się pewna komplikacja w postaci przedziału otwartego. Zaraz zobaczymy, jak sobie z tym radzić. Zaczynamy standardowo:

# 2.105 b

$f(x) = \dfrac{1-x^2}{x-3}$ oraz przedział $\langle -5, 3)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji. Pojawiła się pewna komplikacja w postaci przedziału otwartego. Zaraz zobaczymy, jak sobie z tym radzić. Zaczynamy standardowo:

$$f'(x) = \frac{-2x(x-3)-(1-x^2)}{(x-3)^2} = \frac{-x^2+6x-1}{(x-3)^2}$$

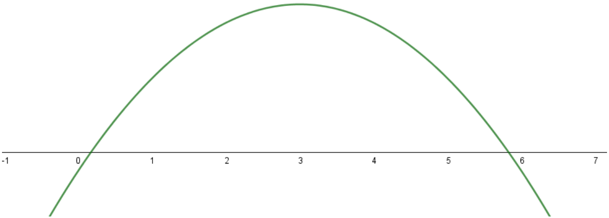
Teraz rozwiązujemy równanie:

$$\frac{-x^2+6x-1}{(x-3)^2} = 0$$
$$-x^2+6x-1=0$$
$$x^2-6x+1=0$$

Otrzymujemy rozwiązania $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

# 2.105 b

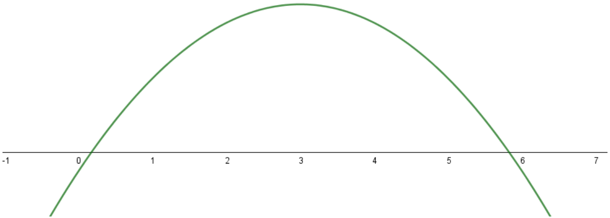
Mianownik pochodnej jest nieujemny, więc szkicujemy licznik:




i odczytujemy z niego, że funkcja ma minimum lokalne dla $x = 3 - 2\sqrt{2}$ oraz maksimum lokalne dla $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

# 2.105 b

Mianownik pochodnej jest nieujemny, więc szkicujemy licznik:




i odczytujemy z niego, że funkcja ma minimum lokalne dla $x = 3 - 2\sqrt{2}$ oraz maksimum lokalne dla $x = 3 + 2\sqrt{2}$. Nas interesuje tylko to pierwsze, gdyż rozważany przedział to $\langle -5, 3)$, a $3 + 2\sqrt{2} \notin \langle -5, 3)$

## 2.105 b

Obliczymy teraz wartość funkcji w dla $x = 3 - 2\sqrt{2}$ oraz, co się dzieje na krańcach przedziałów. Z $-5$ nie ma problemu, po prostu obliczymy wartość funkcji. Ponieważ jednak przedział jest otwarty z prawej strony, to nie będziemy liczyć $f(3)$, tylko $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

# 2.105 b

Obliczymy teraz wartość funkcji w dla $x = 3 - 2\sqrt{2}$ oraz, co się dzieje na krańcach przedziałów. Z $-5$ nie ma problemu, po prostu obliczymy wartość funkcji. Ponieważ jednak przedział jest otwarty z prawej strony, to nie będziemy liczyć $f(3)$, tylko $\lim_{x\to 3^-} f(x)$.
Mamy:

$$f(3 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 6$$

$$f(-5) = 3$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1 - x^2}{x - 3} \overset{\left[{}^{-8}/_{0^-}\right]}{=} = \infty$$

# 2.105 b

Obliczymy teraz wartość funkcji w dla $x = 3 - 2\sqrt{2}$ oraz, co się dzieje na krańcach przedziałów. Z $-5$ nie ma problemu, po prostu obliczymy wartość funkcji. Ponieważ jednak przedział jest otwarty z prawej strony, to nie będziemy liczyć $f(3)$, tylko $\lim_{x\to 3^-} f(x)$.
Mamy:

$$f(3 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 6$$

$$f(-5) = 3$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1 - x^2}{x - 3} \overset{\left[ -8/0^- \right]}{=} = \infty$$

Czyli najmniejsza wartość funkcji w danym przedziale to $4\sqrt{2} - 6$, zaś największa nie istnieje (funkcja dąży do $\infty$).

# 2.105 d

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ oraz przedział $\langle 1, 2) \cup (2, 3\rangle$.

# 2.105 d

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ oraz przedział $\langle 1, 2) \cup (2, 3\rangle$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

# 2.105 d

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ oraz przedział $\langle 1, 2) \cup (2, 3\rangle$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

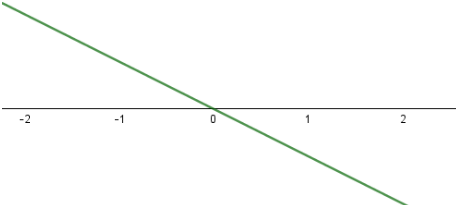
Rozwiązujemy:

$$\frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0$$
$$-2x = 0$$

Otrzymujemy rozwiązanie $x = 0$.

# 2.105 d

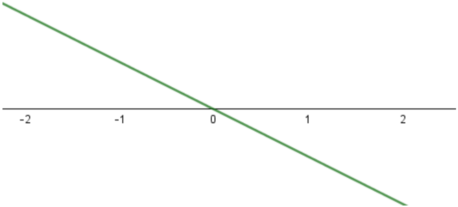
Mianownik pochodnej jest nieujemny, więc szkicujemy licznik:




Dla $x = 0$ mamy maksimum, ale $0 \notin \langle 1, 2) \cup (2, 3\rangle$.

# 2.105 d

Mianownik pochodnej jest nieujemny, więc szkicujemy licznik:




Dla $x = 0$ mamy maksimum, ale $0 \notin \langle 1, 2) \cup (2, 3\rangle$. W danym przedziale nie ma ekstremów.

# 2.105 d

Musimy policzyć co się dzieje na krańcach przedziałów:

# 2.105 d

Musimy policzyć co się dzieje na krańcach przedziałów:
Mamy:

$$f(1) = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} = \infty$$

$$f(3) = \frac{1}{5}$$

# 2.105 d

Musimy policzyć co się dzieje na krańcach przedziałów:
Mamy:

$$f(1) = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} = \infty$$

$$f(3) = \frac{1}{5}$$

Funkcja nie ma ani najmniejszej ani największej wartości.

## 2.106 b

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4\frac{2}{3}$ oraz przedział $(-3, 2)$.

# 2.106 b

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4\frac{2}{3}$ oraz przedział $(-3, 2)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

# 2.106 b

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4\frac{2}{3}$ oraz przedział $(-3, 2)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

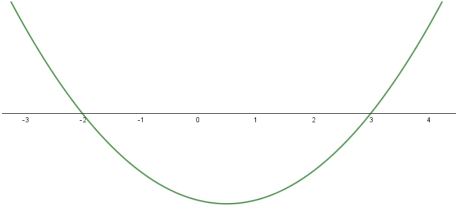
Rozwiązujemy równanie:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$

Otrzymujemy rozwiązania $x = 3$ oraz $x = -2$.

# 2.106 b

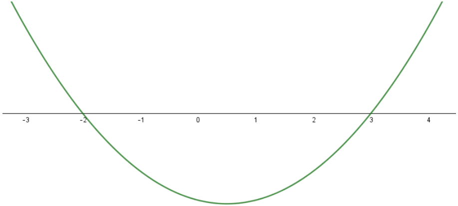
Szkicujemy wykres pochodnej:




Dla $x = -2$ mamy maksimum, a dla $x = 3$ minimum.

# 2.106 b

Szkicujemy wykres pochodnej:




Dla $x = -2$ mamy maksimum, a dla $x = 3$ minimum. W zadanym przedziale mieści się tylko ten pierwszy argument.

# 2.106 b

Obliczamy wartość dla $x = -2$ oraz to, co się dzieje na krańcach przedziału:

# 2.106 b

Obliczamy wartość dla $x = -2$ oraz to, co się dzieje na krańcach przedziału:
Mamy:

$$f(-2) = 12$$

$$\lim_{x \to -3^+} = 9\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = -6\frac{2}{3}$$

# 2.106 b

Obliczamy wartość dla $x = -2$ oraz to, co się dzieje na krańcach przedziału:
Mamy:

$$f(-2) = 12$$

$$\lim_{x \to -3^+} = 9\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = -6\frac{2}{3}$$

Funkcja ma największą wartość równą 12, ale nie ma najmniejszej wartości.

# 2.106 b

Obliczamy wartość dla $x = -2$ oraz to, co się dzieje na krańcach przedziału:
Mamy:

$$f(-2) = 12$$

$$\lim_{x \to -3^+} = 9\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = -6\frac{2}{3}$$

Funkcja ma największą wartość równą 12, ale nie ma najmniejszej wartości. Funkcja dąży do $-6\frac{2}{3}$, ale nie przyjmuje tej wartości.

# 2.106 b

Obliczamy wartość dla $x = -2$ oraz to, co się dzieje na krańcach przedziału:
Mamy:

$$f(-2) = 12$$

$$\lim_{x \to -3^+} = 9\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = -6\frac{2}{3}$$

Funkcja ma największą wartość równą 12, ale nie ma najmniejszej wartości. Funkcja dąży do $-6\frac{2}{3}$, ale nie przyjmuje tej wartości.

W związku z tym zbiorem wartości będzie $(-6\frac{2}{3}, 12\rangle$

# 2.106 d

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + 6$ oraz przedział $(-2, 2)$.

# 2.106 d

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + 6$ oraz przedział $(-2, 2)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

# 2.106 d

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + 6$ oraz przedział $(-2, 2)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

Rozwiązujemy równanie:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

Jedno rozwiązanie to $x = 1$. Dzielimy wielomian i otrzymujemy:

# 2.106 d

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + 6$ oraz przedział $(-2, 2)$.

Szukamy ekstremów tej funkcji.

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

Rozwiązujemy równanie:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

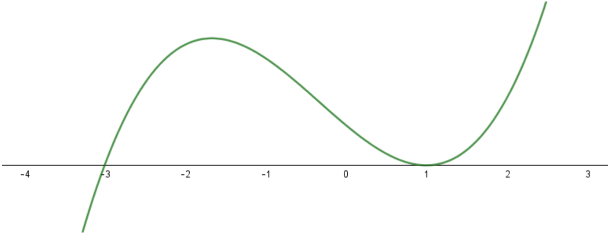
Jedno rozwiązanie to $x = 1$. Dzielimy wielomian i otrzymujemy:

$$(x-1)(x^2 - 2x - 3) = 0$$
$$(x-1)^2(x+3) = 0$$

Czyli mamy rozwiązania $x = 1$ oraz $x = -3$.

# 2.106 d

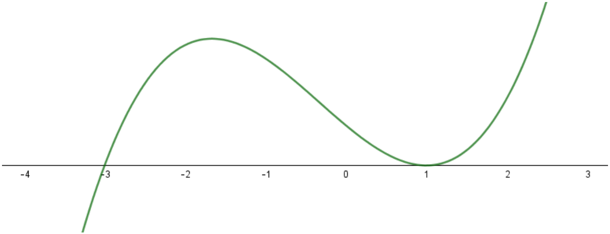
Szkicujemy wykres pochodnej:




Dla $x = -3$ mamy minimum, w $x = 1$ nie ma ekstremum.

# 2.106 d

Szkicujemy wykres pochodnej:




Dla $x = -3$ mamy minimum, w $x = 1$ nie ma ekstremum. W związku z tym w danym przedziale nie ma ekstremów.

# 2.106 d

Analizujemy sytuację na krańcach przedziału

# 2.106 d

Analizujemy sytuację na krańcach przedziału
Mamy:

$$\lim_{x \to -2^+} = -8\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = 8\frac{2}{3}$$

## 2.106 d

Analizujemy sytuację na krańcach przedziału
Mamy:

$$\lim_{x \to -2^+} = -8\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = 8\frac{2}{3}$$

Funkcja nie ma ani najmniejszej ani największej wartości w zadanym przedziale.

# 2.106 d

Analizujemy sytuację na krańcach przedziału
Mamy:

$$\lim_{x \to -2^+} = -8\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = 8\frac{2}{3}$$

Funkcja nie ma ani najmniejszej ani największej wartości w zadanym przedziale.

Zbiorem wartości jest przedział otwarty $(-8\frac{2}{3}, 8\frac{2}{2})$