Pochodna funkcji w punkcie

Na prezentacji omówione zostaną przykłady obliczania pochodnej danej funkcji w punkcie.

Wprowadzenie

Intuicyjne rozumienie jest proste - pochodna funkcji opisuje tempo zmiany danej (nachylenie) funkcji. W przypadku funkcji liniowych to nachylenie jest stałe, natomiast inne funkcje mają różne nachylenie/tempo zmiany w zależności od argumentu.

Wprowadzenie

Intuicyjne rozumienie jest proste - pochodna funkcji opisuje tempo zmiany danej (nachylenie) funkcji. W przypadku funkcji liniowych to nachylenie jest stałe, natomiast inne funkcje mają różne nachylenie/tempo zmiany w zależności od argumentu.

Przykładowo funkcja $f(x) = x^2$ rośnie szybko, gdy $x = 2$, rośnie wolno, gdy $x = \frac{1}{2}$, jest stała, gdy $x = 0$, maleje wolno, gdy $x = -\frac{1}{2}$ i maleje szybko, gdy $x = -2$.

Wprowadzenie

Intuicyjne rozumienie jest proste - pochodna funkcji opisuje tempo zmiany danej (nachylenie) funkcji. W przypadku funkcji liniowych to nachylenie jest stałe, natomiast inne funkcje mają różne nachylenie/tempo zmiany w zależności od argumentu.

Przykładowo funkcja $f(x) = x^2$ rośnie szybko, gdy $x = 2$, rośnie wolno, gdy $x = \frac{1}{2}$, jest stała, gdy $x = 0$, maleje wolno, gdy $x = -\frac{1}{2}$ i maleje szybko, gdy $x = -2$.

W związku z powyższym funkcja $f(x) = x^2$, będzie miała inną wartość pochodnej dla każdej z tych wartości.

Definicja

Pochodną funkcji $f(x)$ dla $x = x_0$ zapisujemy $f'(x_0)$ i definiujemy następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja

Pochodną funkcji $f(x)$ dla $x = x_0$ zapisujemy $f'(x_0)$ i definiujemy następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tutaj uwaga: by pochodna w danym punkcie istniała, to powyższa granica musi istnieć, a więc musimy mieć:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja

Pochodną funkcji $f(x)$ dla $x = x_0$ zapisujemy $f'(x_0)$ i definiujemy następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tutaj uwaga: by pochodna w danym punkcie istniała, to powyższa granica musi istnieć, a więc musimy mieć:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Uwaga - dodaliśmy oznaczenie $f'(x_0)$. Powtórzmy - oznacza ono nachylenie (pochodną) funkcji f dla $x = x_0$.

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$.

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$. Czyli $f'(3)$.

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$. Czyli $f'(3)$.

Mamy do czynienia z funkcją liniową, więc pochodna powinna wyjść 2 w każdym punkcie, bo tempo zmiany tej funkcji jest stałe. Przekonajmy się, że tak rzeczywiście jest:

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$. Czyli $f'(3)$.

Mamy do czynienia z funkcją liniową, więc pochodna powinna wyjść 2 w każdym punkcie, bo tempo zmiany tej funkcji jest stałe. Przekonajmy się, że tak rzeczywiście jest: (spróbujcie najpierw samodzielnie)

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$. Czyli $f'(3)$.

Mamy do czynienia z funkcją liniową, więc pochodna powinna wyjść 2 w każdym punkcie, bo tempo zmiany tej funkcji jest stałe. Przekonajmy się, że tak rzeczywiście jest: (spróbujcie najpierw samodzielnie)

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(3 + \Delta x) + 3 - (2 \cdot 3 + 3)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2
\end{aligned}
$$

Przykład 2

Obliczmy pochodną $f(x) = \sqrt{2x+1}$ dla $x = 1$

Przykład 2

Obliczmy pochodną $f(x) = \sqrt{2x+1}$ dla $x = 1$ (Spróbuj najpierw samodzielnie)

Przykład 2

Obliczmy pochodną $f(x) = \sqrt{2x+1}$ dla $x = 1$ (Spróbuj najpierw samodzielnie)

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(1+h)+1} - \sqrt{2\cdot 1+1}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+2h} - \sqrt{3}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3+2h-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2}{(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

Przykład 3

Obliczmy pochodną $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dla $x = 2$

Przykład 3

Obliczmy pochodną $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ dla $x = 2$ (spróbujcie najpierw samodzielnie)

Przykład 3

Obliczmy pochodną $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dla $x = 2$ (spróbujcie najpierw samodzielnie)

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3+\Delta x}{1+\Delta x} - \frac{3}{1}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3+\Delta x}{1+\Delta x} - \frac{3+3\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-2\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{1+\Delta x} = -2
\end{aligned}
$$

We wszystkich powyższych przykładach obliczaliśmy pochodną licząc granicę, gdy $\Delta x \to 0$. Nie przejmowaliśmy się, czy $\Delta x \to 0^+$, czy $\Delta x \to 0^-$, gdyż znak Δx nie miał żadnego wpływu na otrzymywany wynik.

We wszystkich powyższych przykładach obliczaliśmy pochodną licząc granicę, gdy $\Delta x \to 0$. Nie przejmowaliśmy się, czy $\Delta x \to 0^+$, czy $\Delta x \to 0^-$, gdyż znak Δx nie miał żadnego wpływu na otrzymywany wynik.

Przeanalizujemy teraz kilka przykładów, gdy musimy sprawdzić lewostronną i prawostronną granicę.

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$ Robiliśmy to już na zajęciach, tutaj powtórzenie

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$ Robiliśmy to już na zajęciach, tutaj powtórzenie

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$ Robiliśmy to już na zajęciach, tutaj powtórzenie

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Natomiast:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$ Robiliśmy to już na zajęciach, tutaj powtórzenie

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Natomiast:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Czyli

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

W związku z tym $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ nie istnieje (gdyż granice lewo- i prawostronne są różne), a więc $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej dla $x = 0$.

Przykład 5

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x^2+1}$, gdy $x = -1$.
Najpierw obliczymy granicę, gdy $\Delta x \to 0^-$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2+1}$, gdy $x = -1$.
Najpierw obliczymy granicę, gdy $\Delta x \to 0^-$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{|\Delta x|}{(-1+\Delta x)^2+1} - \frac{-1+1}{(-1)^2+1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{-\Delta x}{(\Delta x)^2-2\Delta x+2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-1}{(\Delta x)^2 - 2\Delta x + 2} = -\frac{1}{2}$$

Przykład 5

Podobnie obliczamy granicę, gdy $\Delta x \to 0^+$

Przykład 5

Podobnie obliczamy granicę, gdy $\Delta x \to 0^+$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{|\Delta x|}{(-1+\Delta x)^2+1} - \frac{-1+1}{(-1)^2+1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{-\Delta x}{\Delta x^2 - 2\Delta x + 2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\Delta x^2 - 2\Delta x + 2} = \frac{1}{2}$$

Przykład 5

Podobnie obliczamy granicę, gdy $\Delta x \to 0^+$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{|\Delta x|}{(-1+\Delta x)^2+1} - \frac{-1+1}{(-1)^2+1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{-\Delta x}{\Delta x^2 - 2\Delta x + 2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\Delta x^2 - 2\Delta x + 2} = \frac{1}{2}$$

Granice są różne:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

a więc pochodna funkcji $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2+1}$, gdy $x = -1$, nie istnieje.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$,

gdy $x = 1$.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$, gdy $x = 1$. Tutaj mamy funkcję zdefiniowaną różnymi wzorami, więc

sprawdźmy najpierw, czy ta funkcja w ogóle jest ciągła w $x = 1$.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$,
gdy $x = 1$. Tutaj mamy funkcję zdefiniowaną różnymi wzorami, więc

sprawdźmy najpierw, czy ta funkcja w ogóle jest ciągła w $x = 1$. Mamy:

$$f(1) = 1^3 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x - 2) = 1$$

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$,
gdy $x = 1$. Tutaj mamy funkcję zdefiniowaną różnymi wzorami, więc

sprawdźmy najpierw, czy ta funkcja w ogóle jest ciągła w $x = 1$. Mamy:

$$f(1) = 1^3 = 1$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x - 2) = 1$$

Wszystkie wartości są sobie równe, czyli funkcja jest ciągła w $x = 1$.

Przykład 6

Teraz sprawdzamy pochodną. Sprawdźmy najpierw dla $\Delta x \to 0^-$:

Przykład 6

Teraz sprawdzamy pochodną. Sprawdźmy najpierw dla $\Delta x \to 0^-$:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1+\Delta x)^3 - 1^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2) = 3$$

Przykład 6

Sprawdzamy dla $\Delta x \to 0^+$:

Przykład 6

Sprawdzamy dla $\Delta x \to 0^+$:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3(1+\Delta x) - 2 - 1^3}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3 + 3\Delta x - 2 - 1}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 3 = 3$$

Przykład 6

Sprawdzamy dla $\Delta x \to 0^+$:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3(1+\Delta x) - 2 - 1^3}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3 + 3\Delta x - 2 - 1}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 3 = 3$$

Funkcja jest ciągła, granice się zgadzają, a więc pochodna dla $x = 1$ istnieje i ma wartość 3, czyli $f'(1) = 3$.