Przebieg zmienności funkcji

Na prezentacji przyjrzymy się dokładnie jednej funkcji i omówimy jej wszystkie własności, by na końcu narysować jej wykres.

Na prezentacji przyjrzymy się dokładnie jednej funkcji i omówimy jej wszystkie własności, by na końcu narysować jej wykres. Czyli zrobimy to, co dzisiaj robiliście przy tablicach.

2.109 d

Mamy funkcję $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

2.109 d

Mamy funkcję $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$. Od razu zapiszemy $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)}$

2.109 d

Mamy funkcję $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$. Od razu zapiszemy $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)}$

Dziedziną tej funkcji jest oczywiście zbiór $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

2.109 d

Mamy funkcję $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$. Od razu zapiszemy $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)}$

Dziedziną tej funkcji jest oczywiście zbiór $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Przy tej okazji widzimy też, że będziemy mieć dwie pionowe asymptoty: w $x = 1$ oraz w $x = -1$ (dla tych argumentów mianownik jest 0, a licznik nie).

2.109 d - asymptoty pionowe

Policzmy granice, gdy x dąży do tych wartości:

2.109 d - asymptoty pionowe

Policzmy granice, gdy x dąży do tych wartości:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-{}^1/_{0^-}\right]}{=} \infty$$

2.109 d - asymptoty pionowe

Policzmy granice, gdy x dąży do tych wartości:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-1/0^-\right]}{=} \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-1/0^+\right]}{=} -\infty$$

2.109 d - asymptoty pionowe

Policzmy granice, gdy x dąży do tych wartości:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-1/0^-\right]}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-1/0^+\right]}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[1/0^+\right]}{=} \infty$$

2.109 d - asymptoty pionowe

Policzmy granice, gdy x dąży do tych wartości:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-1/0^-\right]}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-1/0^+\right]}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[1/0^+\right]}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[1/0^-\right]}{=} -\infty$$

2.109 d - asymptoty pionowe

Policzmy granice, gdy x dąży do tych wartości:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-{}^1/_{0^-}\right]}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[-{}^1/_{0^+}\right]}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[{}^1/_{0^+}\right]}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \overset{\left[{}^1/_{0^-}\right]}{=} -\infty$$

Te informacje wykorzystamy rysując wykres.

2.109 d - asymptoty ukośne/poziome

Potęga w liczniku jest o jeden wyższa od tej w mianowniku, więc będziemy mieć do czynienia z asymptotą ukośną. Obliczmy ją:

2.109 d - asymptoty ukośne/poziome

Potęga w liczniku jest o jeden wyższa od tej w mianowniku, więc będziemy mieć do czynienia z asymptotą ukośną. Obliczmy ją:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2(\frac{1}{x^2} - 1)} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

2.109 d - asymptoty ukośne/poziome

Potęga w liczniku jest o jeden wyższa od tej w mianowniku, więc będziemy mieć do czynienia z asymptotą ukośną. Obliczmy ją:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 \cdot \frac{1}{x}}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}\right) = \frac{0}{-1} = 0$$

2.109 d - asymptoty ukośne/poziome

Potęga w liczniku jest o jeden wyższa od tej w mianowniku, więc będziemy mieć do czynienia z asymptotą ukośną. Obliczmy ją:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}\right) = \frac{0}{-1} = 0$$

Czyli mamy ukośną asymptotę $y = -x$.

2.109 d - asymptoty ukośne/poziome

Potęga w liczniku jest o jeden wyższa od tej w mianowniku, więc będziemy mieć do czynienia z asymptotą ukośną. Obliczmy ją:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}\right) = \frac{0}{-1} = 0$$

Czyli mamy ukośną asymptotę $y=-x$. Nie musimy liczyć granicy dla $x\to-\infty$, widzimy, że wyjdzie dokładnie to samo.

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

Mianownik jest nieujemny, więc znak pochodnej zależy od znaku licznika.

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

Mianownik jest nieujemny, więc znak pochodnej zależy od znaku licznika. Naszkicujmy wykres licznika.

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

Mianownik jest nieujemny, więc znak pochodnej zależy od znaku licznika. Naszkicujmy wykres licznika.

$$3x^2 - x^4 = x^2(3-x^2) = x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$$

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

Mianownik jest nieujemny, więc znak pochodnej zależy od znaku licznika. Naszkicujmy wykres licznika.

$$3x^2 - x^4 = x^2(3-x^2) = x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$$

Miejsca zerowe: 0, $\sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{3}$.

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

Mianownik jest nieujemny, więc znak pochodnej zależy od znaku licznika. Naszkicujmy wykres licznika.

$$3x^2 - x^4 = x^2(3-x^2) = x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$$

Miejsca zerowe: $0, \sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{3}$. Przy czym 0 jest podwójnym miejscem zerowym.

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

Mianownik jest nieujemny, więc znak pochodnej zależy od znaku licznika. Naszkicujmy wykres licznika.

$$3x^2 - x^4 = x^2(3-x^2) = x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$$

Miejsca zerowe: $0, \sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{3}$. Przy czym 0 jest podwójnym miejscem zerowym. Zaczynamy rysować od prawej strony, od dołu:

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

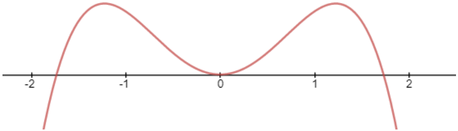
Obliczmy pochodną naszej funkcji:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

Mianownik jest nieujemny, więc znak pochodnej zależy od znaku licznika. Naszkicujmy wykres licznika.

$$3x^2 - x^4 = x^2(3-x^2) = x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$$

Miejsca zerowe: 0, $\sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{3}$. Przy czym 0 jest podwójnym miejscem zerowym. Zaczynamy rysować od prawej strony, od dołu:



2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia).

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum, później rosnąca dla $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum, później rosnąca dla $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$, dla $x = -1$ mamy asymptotę pionową,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum, później rosnąca dla $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$, dla $x = -1$ mamy asymptotę pionową, dalej rosnąca dla $x \in (-1, 1)$,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum, później rosnąca dla $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$, dla $x = -1$ mamy asymptotę pionową, dalej rosnąca dla $x \in (-1, 1)$, przy czym dla $x = 0$ mamy nachylenie 0,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum, później rosnąca dla $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$, dla $x = -1$ mamy asymptotę pionową, dalej rosnąca dla $x \in (-1, 1)$, przy czym dla $x = 0$ mamy nachylenie 0, w $x = 1$ pionowa asymptota,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum, później rosnąca dla $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$, dla $x = -1$ mamy asymptotę pionową, dalej rosnąca dla $x \in (-1, 1)$, przy czym dla $x = 0$ mamy nachylenie 0, w $x = 1$ pionowa asymptota, dla $x \in (1, \sqrt{3}\rangle$ funkcja dalej rośnie,

2.109 d - ekstrema lokalne i monotoniczność

Mamy ekstrema lokalne w $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dla $x = -\sqrt{3}$ mamy lokalne minimum (pochodna ujemna, 0, dodatnia). Dla $x = \sqrt{3}$ mamy lokalne maksimum (pochodna dodatnia, 0, ujemna).

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, dla $x = -\sqrt{3}$ lokalne minimum, później rosnąca dla $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$, dla $x = -1$ mamy asymptotę pionową, dalej rosnąca dla $x \in (-1, 1)$, przy czym dla $x = 0$ mamy nachylenie 0, w $x = 1$ pionowa asymptota, dla $x \in (1, \sqrt{3}\rangle$ funkcja dalej rośnie, dla $x \in \langle \sqrt{3}, \infty)$ funkcja maleje.

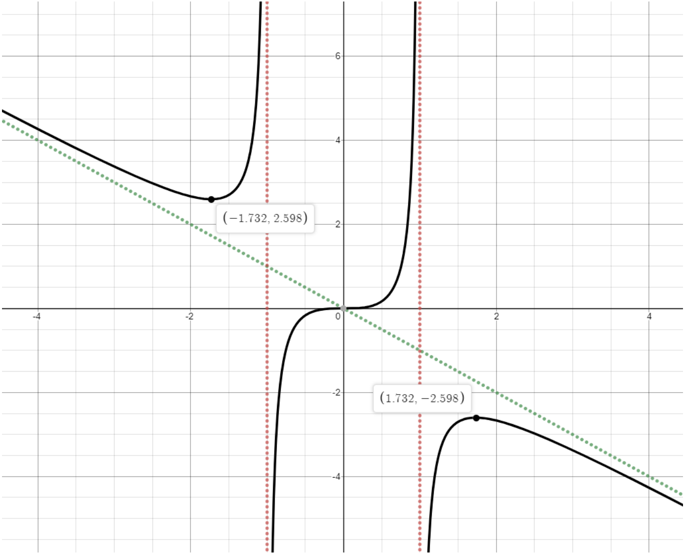
2.109 d

Już właściwie możemy narysować naszą funkcję. Warto jeszcze tylko policzyć przecięcia z osiami.

2.109 d

Już właściwie możemy narysować naszą funkcję. Warto jeszcze tylko policzyć przecięcia z osiami. Tutaj sprawa jest bardzo prosta - funkcja przecina osie jedynie w środku układu współrzędnych $(0, 0)$

2.109 d - wykres



Na maturze takiego zadania nie będzie, ale warto przećwiczyć przynajmniej kilka podobnych, gdyż sprawdzają one prawie wszystkie ważne umiejętności z tego działu.