Rozdział 7

Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

W dziale geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej:

Zdający powinien opanować umiejętności z **poziomu podstawowego**, rozwiązując zadania, w których:

a) wykorzystuje pojęcie układu współrzędnych na płaszczyźnie,
b) podaje równanie prostej w postaci $Ax+By+C=0$ lub $y=ax+b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym,
c) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych,
d) interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi,
e) oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej,
f) wyznacza współrzędne środka odcinka,
g) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

oraz z **poziomu rozszerzonego** powinien opanować umiejętności, w których:

a) interpretuje geometrycznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi i układy takich nierówności,
b) rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej,
c) oblicza odległość punktu od prostej,
d) opisuje koła za pomocą nierówności,
e) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę,
f) interpretuje geometrycznie działania na wektorach,
g) stosuje wektory do rozwiązywania zadań, a także do dowodzenia własności figur,
h) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

Poziom podstawowy

Zadanie 1. (Próba listopad 2009 — zadanie 28 (*2 p.*))

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A=(2,5)$ i $C=(6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

I sposób rozwiązania

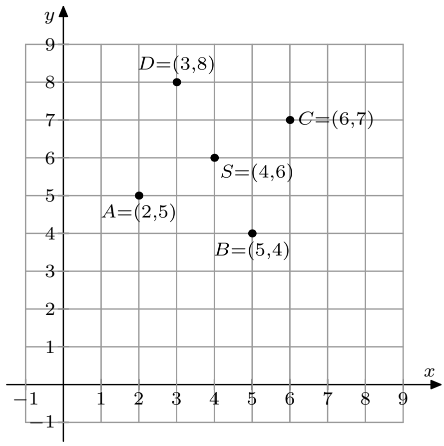
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{1}{2}$, a następnie wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej BD prostopadłej do AC: $a_{BD} = -2$.

Wyznaczamy współrzędne środka S odcinka AC: $S = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = (4,6)$ i wyznaczamy równanie prostej o współczynniku kierunkowym -2, przechodzącej przez punkt S.

Odpowiedź: $y = -2x + 14$.

II sposób rozwiązania

Wykonujemy rysunek w prostokątnym układzie współrzędnych, zaznaczając punkty A i C.



Na podstawie wyznaczonych punktów określamy współrzędne środka odcinka AC: $S = (4,6)$, a następnie zaznaczamy punkty $B = (5,4)$ i $D = (3,8)$.

Wyznaczamy równanie prostejBD w dowolnej postaci, np. $y = -2x + 14$. W szczególności, możemy znaleźć punkty przecięcia prostej BD z osiami układu współrzędnych i zapisać równanie odcinkowe $\frac{x}{7} + \frac{y}{14} = 1$. Możemy również odczytać z rysunku współczynnik kierunkowy prostej BD i punkt przecięcia z osią Oy.

III sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AC, np.

$$(x_C - x_A)x + (y_C - y_A)y - (x_C - x_A)x_S - (y_C - y_A)y_S = 0,$$

gdzie: $A = (x_A, y_A)$, $C = (x_C, y_C)$ i $S = (x_S, y_S)$ jest środkiem odcinka AC. Symetralną odcinka AC jest prosta o równaniu $2x + y - 14 = 0$. Ta prosta przechodzi przez punkty B i D.

IV sposób rozwiązania

Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AC} = [4,2]$.

Zapisujemy równanie prostej BD wynikające z iloczynu skalarnego dwóch wektorów: $4 \cdot x' + 2 \cdot y' = 0$, gdzie $x' = x - x_S$ oraz $y' = y - y_S$, $4(x - x_S) + 2(y - y_S) = 0$, gdzie $S = (x_S, y_S)$ jest środkiem przekątnej AC.

Obliczamy współrzędne środka kwadratu $ABCD$: $S=(4,6)$.

Wyznaczamy równanie prostej BD w postaci np. $y=-2x+14$.

V sposób rozwiązania

Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AC}=[4,2]$ oraz wektora do niego prostopadłego, np. $[-2,4]$.

Zapisujemy równanie parametryczne prostej prostopadłej przechodzącej przez punkt $S=(4,6)$ — środek przekątnej kwadratu $ABCD$: $\begin{cases} x=4-2t \\ y=6+4t. \end{cases}$

Wyznaczamy równanie prostej BD w dowolnej postaci, przekształcając układ równań, np. $y-6+2(x-4)=0$.

VI sposób rozwiązania

Na podstawie współrzędnych punktów $A=(2,5)$ i $C=(6,7)$ zapisujemy równość odległości od punktu $P=(x,y)$, gdzie P jest dowolnym punktem leżącym na symetralnej odcinka AC: $(x-2)^2+(y-5)^2=(x-6)^2+(y-7)^2$.

Wyznaczamy równanie prostej BD w postaci np. $y=-2x+14$.

Zadanie 2. (Próba listopad 2009 — zadanie 33 (*4 p.*))

Punkty $A=(2,0)$ i $B=(12,0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=x$. Oblicz współrzędne punktu C.

I sposób rozwiązania

Punkt C leży na prostej o równaniu $y=x$ i na okręgu, którego środkiem jest środek przeciwprostokątnej, a promień jest równy połowie długości tej przeciwprostokątnej.

Obliczamy długość przeciwprostokątnej AB: $|AB|=\sqrt{(12-2)^2+(0-0)^2}=10$.

Wyznaczamy współrzędne środka przeciwprostokątnej: $S=(7,0)$.

Zapisujemy równanie okręgu: $(x-7)^2+y^2=25$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y=x \\ (x-7)^2+y^2=25 \end{cases}$.

Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą: $x^2-7x+12=0$.

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $x_1=4$, $x_2=3$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy współrzędne punktu C przez (x,y). Wtedy

$$|AB|=\sqrt{(12-2)^2+(0-0)^2}=10,$$
$$|AC|=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2},$$
$$|BC|=\sqrt{(x-12)^2+(y-0)^2}.$$

Trójkąt ABC jest prostokątny, więc spełniona jest równość $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$, czyli

$$(x-2)^2+y^2+(x-12)^2+y^2=10^2.$$

Punkt C leży też na prostej o równaniu $y=x$, zatem, aby obliczyć jego współrzędne, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2+(x-12)^2+y^2=10^2\\ y=x\end{cases}$$

$$x^2-4x+4+x^2+x^2-24x+144+x^2=100$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$x_1=4, \quad x_2=3.$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

III sposób rozwiązania

Oznaczamy współrzędne punktu C przez (x,y). Punkt C leży na prostej o równaniu $y=x$ i jednocześnie jest początkiem dwóch wektorów prostopadłych $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$.

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CA}=[2-x,-y], \quad \overrightarrow{CB}=[12-x,-y].$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases}y=x\\ (2-x)(12-x)+(-y)(-y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x\\ 24-2x-12x+x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$2x^2-14x+24=0$$

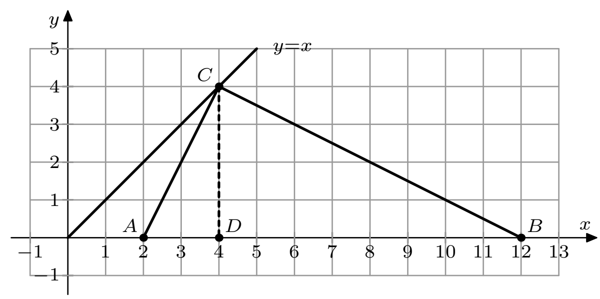
$$x^2-7x+12=0$$

$$x_1=3, \quad x_2=4.$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

IV sposób rozwiązania

Punkt C leży na prostej o równaniu $y=x$, więc $C=(x,x)$.



Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną AB, więc $D=(x,0)$. Korzystając ze związków miarowych w trójkącie prostokątnym otrzymujemy zależność $|CD|^2=|AD|\cdot|DB|$. Długości tych odcinków to: $|CD|=|x|$, $|AD|=|x-2|$, $|DB|=|12-x|$.

Otrzymujemy równanie $|x|^2=|x-2|\cdot|12-x|$ dla $x\in\langle 2,12\rangle$, czyli

$$x^2=14x-24-x^2,$$

$$x^2-7x+12=0,$$

$$x_1=4,\quad x_2=3.$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

V sposób rozwiązania

Zapisujemy układ równań złożony z równania prostej $y=x$ oraz równań pęków prostych przechodzących odpowiednio przez punkty A i B.

$$\begin{cases} y=x \\ y=a(x-2) \\ y=-\frac{1}{a}(x-12). \end{cases}$$

Przekształcamy układ równań do równania z niewiadomą a:

$$\frac{2a}{a(1-a)}+\frac{12}{a}+\frac{2a}{1-a}=0.$$

Przekształcamy równanie wymierne do równania kwadratowego: $a^2-5a+6=0$, skąd otrzymujemy 2 rozwiązania: $a=2$ lub $a=3$.

Otrzymujemy współrzędne dwóch punktów spełniających warunki zadania, odpowiednio $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

Zadanie 3. (Matura maj 2011 — zadanie 31 (*4 p.*))

Okrąg o środku w punkcie $S=(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

I sposób rozwiązania

Współczynnik kierunkowy m prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=2x-3$ jest równy $m=-\frac{1}{2}$.

Zapisujemy równanie prostej prostopadłej do stycznej i przechodzącej przez punkt $S=(3,7)$: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}$.

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}, \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}=2x-3,$$
$$x=\frac{23}{5}.$$

Stąd $y=\frac{31}{5}$.

Zatem punkt styczności ma współrzędne $\left(\frac{23}{5},\frac{31}{5}\right)$.

II sposób rozwiązania

Obliczamy odległość d środka okręgu $S=(3,7)$ od prostej o równaniu $2x-y-3=0$:

$$d=\frac{|6-7-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Punkt $P=(x,2x-3)$ jest punktem styczności okręgu o środku w punkcie $S=(3,7)$ i prostej $y=2x-3$. Zatem $|PS|=d$ oraz $|PS|=\sqrt{(x-3)^2+(2x-10)^2}$.

Przekształcamy równanie $\sqrt{(x-3)^2+(2x-10)^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$ do postaci $5x^2-46x+109-\frac{16}{5}=0$.

Rozwiązujemy równanie $5x^2-46x+105\frac{4}{5}=0$.

Stąd $x=\frac{23}{5}$.

Zatem punkt styczności ma współrzędne: $P=\left(\frac{23}{5},\frac{31}{5}\right)$.

III sposób rozwiązania

Punkt $P=(x,y)$ jest punktem styczności okręgu o środku $S=(3,7)$ i prostej $y=2x-3$.

Zapisujemy układ równań: $\begin{cases}(x-3)^2+(y-7)^2=r^2\\ y=2x-3.\end{cases}$

Przekształcamy układ równań do równania kwadratowego z niewiadomą x:

$$(x-3)^2+(2x-10)^2=r^2,$$
$$5x^2-46x+109-r^2=0.$$

Zapisujemy warunek $\Delta=0$, dla którego okrąg ma jeden punkt wspólny z prostą $y=2x-3$ i obliczamy r^2:

$$\Delta=-64+20r^2,\quad 20r^2-64=0,\quad 20r^2=64,\quad r^2=\frac{64}{20}=\frac{16}{5}.$$

Rozwiązujemy równanie:

$$5x^2-46x+109-\frac{16}{5}=0,$$
$$5x^2-46x+105\frac{4}{5}=0,$$
$$x=\frac{23}{5}.$$

Zatem punkt styczności ma współrzędne: $P=\left(\frac{23}{5},\frac{31}{5}\right)$.

Zadanie 4. (Próba listopad 2010 — zadanie 33 (*4 p.*))

Punkty $A=(1,5)$, $B=(14,31)$, $C=(4,31)$ są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz długość odcinka BD.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y=2x+3$.

Wyznaczamy równanie prostej CD, prostopadłej do prostej AB: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

Obliczamy współrzędne punktu D: $D=(12,27)$.

Obliczamy długość odcinka BD: $|BD|=2\sqrt{5}$.

II sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y=2x+3$.

Wyznaczamy równanie prostej CD, prostopadłej do prostej AB: $y=-\frac{1}{2}x+33$, czyli $x+2y-66=0$.

Obliczamy odległość punktu $B=(14,31)$ od prostej CD o równaniu $x+2y-66=0$:

$\frac{|14+2\cdot 31-66|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, więc $|BD|=2\sqrt{5}$.

III sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y=2x+3$.

Obliczamy odległość punktu $C=(4,31)$ od prostej AB o równaniu $2x-y+3=0$:

$$|CD|=\frac{|2\cdot 4-31+3|}{\sqrt{5}}=\frac{20}{\sqrt{5}}.$$

Obliczamy długość odcinka CB: $|CB|=10$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB i obliczamy długość odcinka BD:

$\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2+|BD|^2=10^2$, więc $|BD|=2\sqrt{5}$.

IV sposób rozwiązania

Obliczamy długość odcinka CB oraz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A: $|CB|=10$, $h_A=26$.

Obliczamy pole trójkąta ABC: $P_{ABC}=\frac{10\cdot 26}{2}=130$.

Obliczamy długość odcinka AB: $|AB|=\sqrt{845}=13\sqrt{5}$.

Pole trójkąta ABC możemy zapisać następująco: $P_{ABC}=\frac{|AB|\cdot|CD|}{2}$. Zatem $\frac{13\sqrt{5}\cdot|CD|}{2}=130$.

Stąd $|CD|=4\sqrt{5}$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB i obliczamy długość odcinka BD: $\left(4\sqrt{5}\right)^2+|BD|^2=10^2$, więc $|BD|=2\sqrt{5}$.

V sposób rozwiązania

Obliczamy długości wszystkich boków trójkąta ABC: $|AB|=\sqrt{845}$, $|AC|=\sqrt{685}$, $|CB|=10$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów CDB i ADCi zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} |CB|^2=|BD|^2+|CD|^2 \\ |CA|^2=(|AB|-|BD|)^2+|CD|^2. \end{cases}$$

Wyznaczamy $|CD|^2$ z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego równania. Otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{685}\right)^2=\left(\sqrt{845}-|BD|\right)^2+10^2-|BD|^2.$$

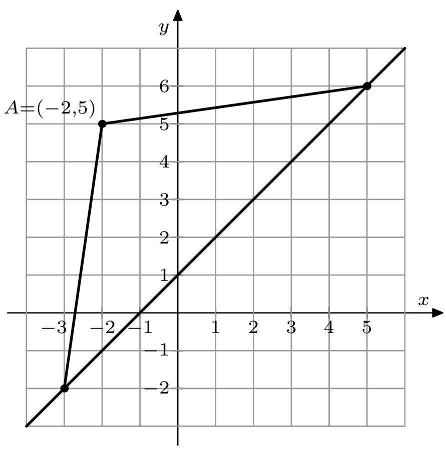
Stąd $|BD|=2\sqrt{5}$.

Poziom rozszerzony

Zadanie 5. (Matura maj 2010 — zadanie 7 (*6 p.*))

Punkt $A=(-2,5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y=x+1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

I sposób rozwiązania



Obliczamy odległość punktu A od prostej o równaniu $x-y+1=0$: $d=\dfrac{|-2-5+1|}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$.

Obliczona odległość d jest równa wysokości trójkąta ABC poprowadzonej do boku BC. Znamy pole trójkąta ABC, więc obliczamy długość boku BC.

$$P_{ABC}=15,$$
$$\frac{1}{2}d\cdot|BC|=15,$$
$$|BC|=\frac{30}{3\sqrt{2}}=5\sqrt{2}.$$

Punkt $C=(x,y)$ leży na prostej o równaniu $y=x+1$, zatem $C=(x,x+1)$.

Ponieważ $|AC|=|BC|$, więc korzystając ze wzoru na długość odcinka, zapisujemy równanie:

$$\sqrt{(x+2)^2+(x+1-5)^2}=5\sqrt{2}$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$x^2+4x+4+x^2-8x+16=50,$$
$$x^2-2x-15=0,$$

$x_1=5$, $x_2=-3$ i następnie $y_1=6$ oraz $y_2=-2$.

Ostatecznie otrzymujemy dwa punkty: $C_1=(5,6)$ oraz $C_2=(-3,-2)$.

II sposób rozwiązania

Punkty B i C leżą na prostej o równaniu $y=x+1$, zatem $B=(x_B,x_B+1)$, $C=(x_C,x_C+1)$. Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AC}=[x_C+2,\ x_C+1-5]=[x_C+2,\ x_C-4]$,

$$\overrightarrow{AB}=[x_B+2,\ x_B-4].$$

Pole trójkąta ABC obliczamy ze wzoru

$$\begin{aligned}P_{ABC}&=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{1}{2}|(x_C+2)\cdot(x_B-4)-(x_C-4)\cdot(x_B+2)|=\\&=\frac{1}{2}|x_C\cdot x_B-4x_C+2x_B-8-x_C\cdot x_B-2x_C+4x_B+8|=\\&=\frac{1}{2}\cdot|6x_B-6x_C|=3\cdot|x_B-x_C|.\end{aligned}$$

Stąd i z tego, że $|AC|=|BC|$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases}|AC|=|BC|\\3\cdot|x_B-x_C|=15.\end{cases}$$

Zatem mamy dwa układy równań:

$$\begin{cases}3\cdot(x_B-x_C)=15\\\sqrt{(x_C+2)^2+(x_C-4)^2}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(x_C-x_B)^2}\end{cases}$$

lub

$$\begin{cases}-3\cdot(x_B-x_C)=15\\\sqrt{(x_C+2)^2+(x_C-4)^2}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(x_C-x_B)^2}.\end{cases}$$

- Rozwiązujemy pierwszy układ równań.

$$\begin{cases} x_B - x_C = 5 \\ \sqrt{x_C^2 + 4x_C + 4 + x_C^2 - 8x_C + 16} = \sqrt{25+25}. \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2x_C^2 - 4x_C + 20 = 50,$$

$$x_C^2 - 2x_C - 15 = 0.$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_C = 5$ i $x_C = -3$.
Współrzędne punktów B i C to $C_1 = (5,6)$, $C_2 = (-3,-2)$, $B_1 = (10,11)$, $B_2 = (2,3)$.

- Rozwiązujemy drugi układ równań.

$$\begin{cases} x_B - x_C = -5 \\ \sqrt{x_C^2 + 4x_C + 4 + x_C^2 - 8x_C + 16} = \sqrt{25+25}. \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2x_C^2 - 4x_C + 20 = 50,$$
$$x_C^2 - 2x_C - 15 = 0.$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_C = 5$ i $x_C = -3$.
Stąd otrzymujemy $C_1 = (5,6)$, $B_1 = (0,1)$ oraz $C_2 = (-3,-2)$, $B_2 = (-8,-7)$.

Wierzchołkiem C trójkąta ABC jest zatem punkt $C = (5,6)$ lub $C = (-3,-2)$.

Zadanie 6. (Matura maj 2011 — zadanie 7 (*4 p.*))

Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2,0)$.

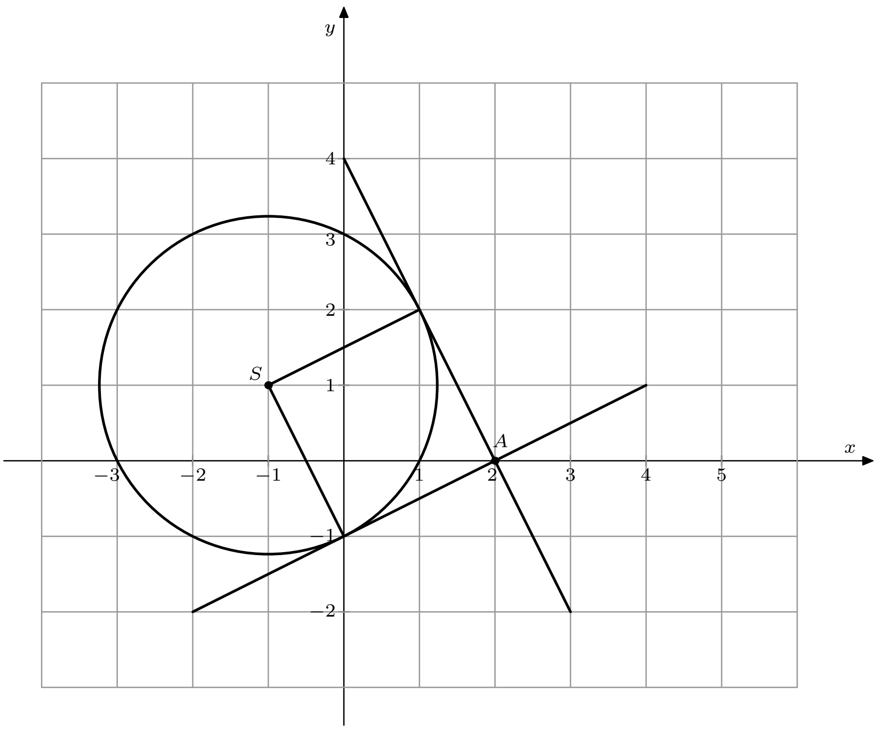
I sposób rozwiązania

Stwierdzamy, że prosta o równaniu $x = 2$ nie jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ (odległość środka okręgu od tej prostej jest większa od promienia). Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $A = (2,0)$: $y = a(x-2)$ lub $y = ax - 2a$ w zależności od parametru a (gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej).

Zapisujemy układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ y = ax - 2a \end{cases}$ i doprowadzamy go do równania kwadratowego z niewiadomą x, np. $x^2 + (ax-2a)^2 + 2x - 2(ax-2a) - 3 = 0$. Prosta $y = ax - 2a$ jest styczna do okręgu wtedy, gdy układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli gdy równanie kwadratowe $x^2 + (ax-2a)^2 + 2x - 2(ax-2a) - 3 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Przekształcamy równanie

$$x^2 + a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 + 2x - 2ax + 4a - 3 = 0,$$

$$x^2\left(1 + a^2\right) + x\left(-4a^2 - 2a + 2\right) + 4a^2 + 4a - 3 = 0.$$



Zapisujemy warunek na to, aby równanie $x^2(1+a^2)+x(-4a^2-2a+2)+4a^2+4a-3=0$ miało jedno rozwiązanie: $\Delta=0$.

Obliczamy $\Delta=\left(-4a^2-2a+2\right)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot(4a^2+4a-3)$ i otrzymujemy równanie

$$4\left(2a^2+a-1\right)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot(4a^2+4a-3)=0.$$

Stąd $2a^2+3a-2=0$.

Rozwiązujemy równanie $2a^2+3a-2=0$:

$$a_1=-2 \quad \text{lub} \quad a_2=\frac{1}{2}.$$

Ponieważ a_1, a_2 oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i $a_1\cdot a_2=-1$, więc te styczne są do siebie prostopadłe.

Stąd miara kąta między stycznymi jest równa 90°.

Możemy też skorzystać ze wzorów Viète'a i zapisać $a_1\cdot a_2=\frac{-2}{2}=-1$, gdzie a_1 i a_2 są pierwiastkami równania $2a^2+3a-2=0$.

Ponieważ a_1, a_2 oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i $a_1\cdot a_2=-1$, więc te styczne są do siebie prostopadłe.

Zatem kąt między stycznymi jest równy 90°.

II sposób rozwiązania

Przekształcamy równanie okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ do postaci $(x+1)^2+(y-1)^2=5$.

Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S=(-1,1)$, $r=\sqrt{5}$.

Stwierdzamy, że prosta o równaniu $x=2$ nie jest styczna do okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$.

Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $A=(2,0)$ i stycznej do okręgu:

$y=a(x-2)$ lub $y=ax-2a$ lub $ax-y-2a=0$ w zależności od parametru a (gdzie a oznacza współczynnik kierunkowy prostej stycznej).

Wyznaczamy odległość środka S okręgu od prostej o równaniu $ax-y-2a=0$:

$$d=\frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Ponieważ promień okręgu jest równy odległości środka okręgu S od stycznej, więc otrzymujemy równanie

$$\sqrt{5}=\frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Przekształcamy to równanie:

$$\sqrt{5a^2+5}=|-3a-1|,$$
$$5a^2+5=9a^2+6a+1,$$

stąd

$$2a^2+3a-2=0.$$

Dalej postępujemy jak w sposobie I.

III sposób rozwiązania

Przekształcamy równanie okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ do postaci $(x+1)^2+(y-1)^2=5$.

Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S=(-1,1)$, $r=\sqrt{5}$.

Rysujemy okrąg o środku $S=(-1,1)$ i promieniu $r=\sqrt{5}$ oraz punkt $A=(2,0)$.

Niech punkty B i C będą punktami styczności prostych poprowadzonych z punktu $A=(2,0)$ do okręgu o równaniu $(x+1)^2+(y-1)^2=5$.

Wówczas $|\sphericalangle SBA|=|\sphericalangle SCA|=90^\circ$ i $|SA|$ jest przeciwprostokątną w trójkątach ACS i ABS.

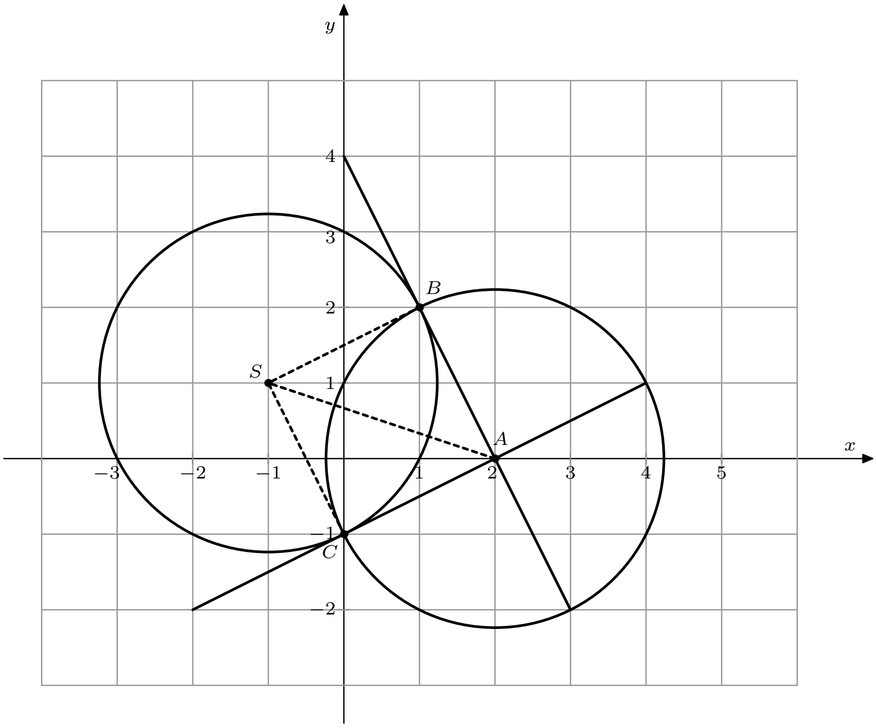
Obliczamy lub odczytujemy długość odcinka $|SA|$:

$$|SA|=\sqrt{(2+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}.$$

Ponieważ $|SB|^2+|AB|^2=|SA|^2$ i $|SC|^2+|CA|^2=|SA|^2$, więc $|AB|=\sqrt{5}$ i $|AC|=\sqrt{5}$. Stąd $|SB|=|AB|=|AC|=|SC|$.

Zapisujemy równanie okręgu o środku w punkcie $A=(2,0)$ i promieniu $|AB|=\sqrt{5}$:

$$(x-2)^2+y^2=5.$$



Punkty przecięcia okręgów o równaniach $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ i $(x-2)^2+y^2=5$, które są jednocześnie punktami styczności prostych stycznych do okręgu $(x+1)^2+(y-1)^2=5$, poprowadzonych przez punkt $A=(2,0)$, to punkty B i C. Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=5 \\ (x-2)^2+y^2=5 \end{cases}$$

lub odczytujemy z wykresu: $B=(1,2)$ i $C=(0,-1)$.

Przekształcamy układ równań do równania i wyznaczamy y w zależności od x:

$$\begin{aligned} (x+1)^2+(y-1)^2&=(x-2)^2+y^2, \\ x^2+2x+1+y^2-2y+1&=x^2-4x+4+y^2, \\ -4x+4-2x+2y-2&=0, \\ -6x+2y+2&=0, \\ 2y&=6x-2, \\ y&=3x-1. \end{aligned}$$

Podstawiamy $y=3x-1$ do równania $(x-2)^2+y^2=5$. Przekształcamy to równanie:

$$\begin{aligned} (x-2)^2+(3x-1)^2&=5 \\ 10x^2-10x&=0, \\ 10x(x-1)&=0. \end{aligned}$$

Stąd $x=0$ lub $x-1=0$.

Zatem $x=0$ lub $x=1$.

Zatem $y=-1$ lub $y=2$.

Punkty styczności mają współrzędne $B=(1,2)$ i $C=(0,-1)$.

Zapisujemy równania prostych AB i AC stycznychdo okręgu $(x+1)^2+(y-1)^2=5$:

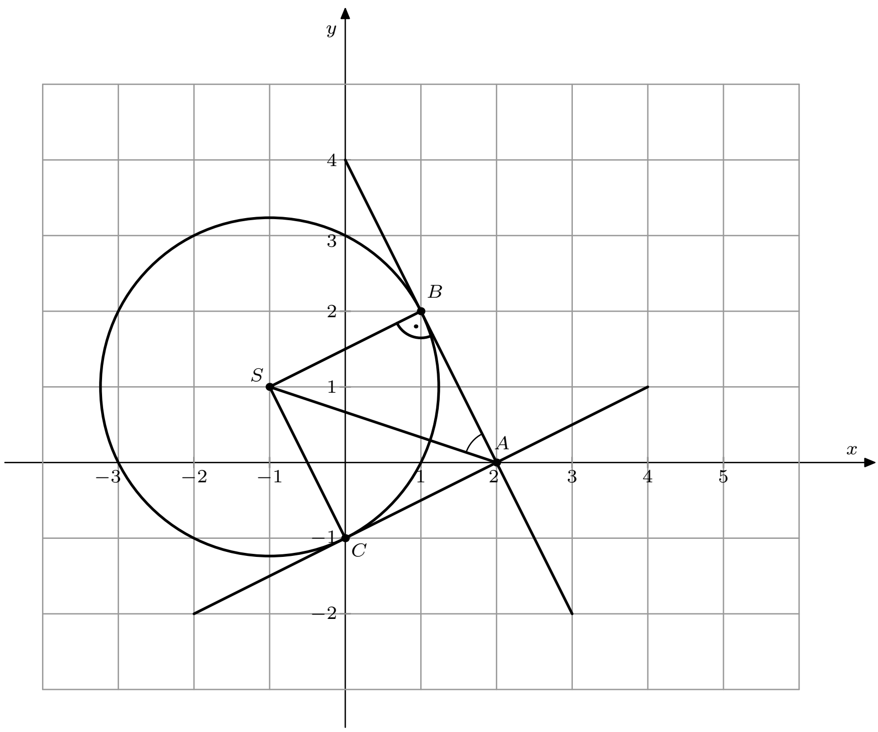
$y=-2x+4$ i $y=\frac{1}{2}x-1$ lub tylko ich współczynniki kierunkowe: $a_1=-2$, $a_2=\frac{1}{2}$.

Ponieważ $-2\cdot\frac{1}{2}=-1$, to proste AB i AC są prostopadłe.

IV sposób rozwiązania

Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S=(-1,1)$, $r=\sqrt{5}$.

Rysujemy okrąg o środku $S=(-1,1)$ i promieniu $r=\sqrt{5}$ oraz punkt $A=(2,0)$.



Mamy: $|SB|=\sqrt{5}$ oraz $|SA|=\sqrt{(-1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$, a trójkąt SAB jest prostokątny, z kątem prostym przy wierzchołku B.

Obliczamy $\sin|\sphericalangle SAB|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Stąd $|\sphericalangle SAB|=45^\circ$, czyli $|\sphericalangle BAC|=90^\circ$.