Odległość punktu od prostej

Prezentacja ma dwie części.

Prezentacja ma dwie części. W pierwszej części przedstawimy wzór na odległość punktu od prostej i odległość między dwiema prostymi równoległymi.

Prezentacja ma dwie części. W pierwszej części przedstawimy wzór na odległość punktu od prostej i odległość między dwiema prostymi równoległymi. W drugiej rozwiążemy wybrane zadania ze zbioru.

CZĘŚĆ PIERWSZA

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l.

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,
- znajdujemy B - punkt przecięcia prostych l i m,

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,
- znajdujemy B - punkt przecięcia prostych l i m,
- obliczamy odległość punktu A od punktu B (ze wzoru albo np. licząc długość $\overrightarrow{AB}$).

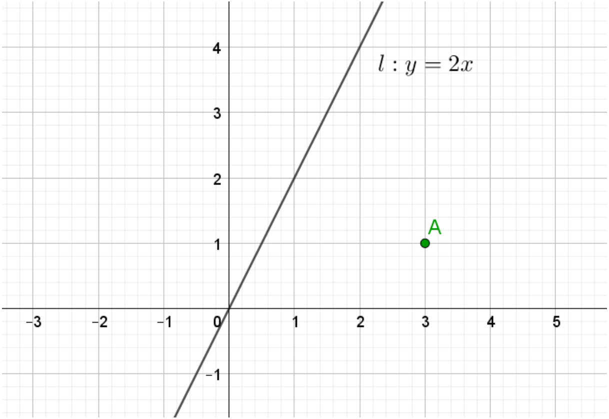
Przykład 1

Obliczymy odległość punktu $A(3,1)$ od prostej $y = 2x$.

Przykład 1

Obliczymy odległość punktu $A(3,1)$ od prostej $y = 2x$.

Rysunek:



Przykład 1

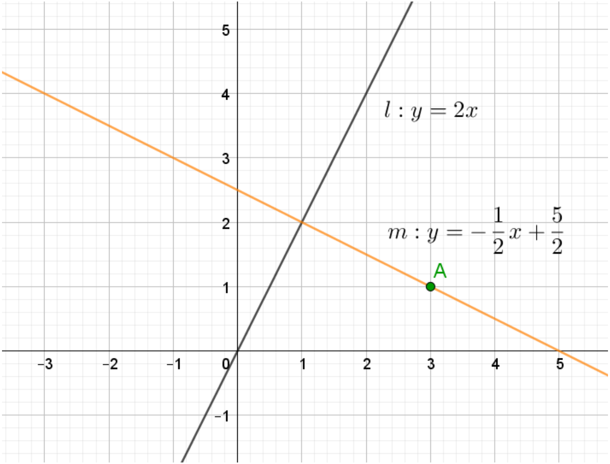
Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.

Przykład 1

Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.
Otrzymujemy $m : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Przykład 1

Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.
Otrzymujemy $m : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$



Przykład 1

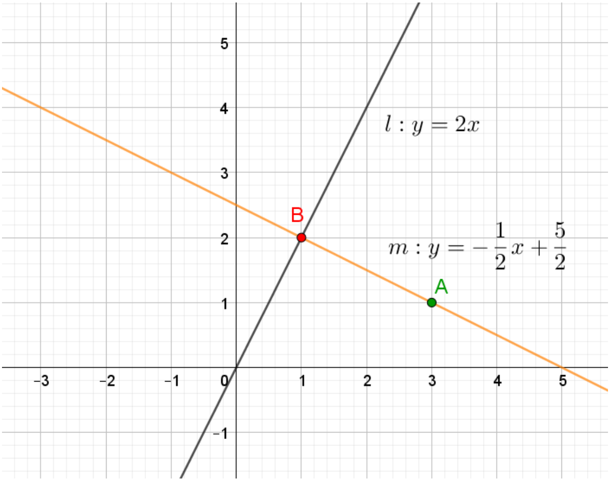
Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m.

Przykład 1

Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m. Otrzymujemy $B(1, 2)$

Przykład 1

Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m. Otrzymujemy $B(1, 2)$



Przykład 1

Odległość od A do l jest równa odległości od A do B, czyli:

$$d(A, l) = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Wzór

Cały ten proces moglibyśmy przeprowadzić bez konkretnych liczb i korzystając ze wzoru prostych w postaci ogólnej (jest to zrobione w podręczniku na stronach 217-218).

Wzór

Cały ten proces moglibyśmy przeprowadzić bez konkretnych liczb i korzystając ze wzoru prostych w postaci ogólnej (jest to zrobione w podręczniku na stronach 217-218).

Uzyskalibyśmy wtedy wzór na odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej k danej równaniem $Ax + By + C = 0$:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne.

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne. Po pierwsze jeśli dwie proste l i k nie są równoległe, to znaczy, że się przetną, czyli odległość między nimi będzie wynosić 0.

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne. Po pierwsze jeśli dwie proste l i k nie są równoległe, to znaczy, że się przetną, czyli odległość między nimi będzie wynosić 0.

Jeśli natomiast proste są równoległe, to wystarczy wybrać dowolny punkt na jednej z nich i obliczyć odległość tego punktu od drugiej prostej.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l: 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k: 2x + 7y + 4 = 0$.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Wybieramy dowolny punkt na prostej l, np. $(-2, 1)$ i teraz obliczamy odległość punktu $P(-2, 1)$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$:

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Wybieramy dowolny punkt na prostej l, np. $(-2, 1)$ i teraz obliczamy odległość punktu $P(-2, 1)$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$:

$$d(l, k) = d(P, k) = \frac{|2 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + 7^2}} = \frac{7}{\sqrt{53}} = \frac{7\sqrt{53}}{53}$$

Wzór

Znów gdybyśmy obliczyli odległość dwóch prostych w postaci ogólnej bez konkretnych liczb tylko na wzorach (podręcznik strony 222-223) to otrzymalibyśmy przyjemny wzór:

Odległość dwóhc porstych równoległych

Jeśli $k: Ax + By + C_1 = 0$ i $l: Ax + By + C_2 = 0$ to mamy:

$$d(k,l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej
$l : 6x - 3y + 1 = 0$

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k: 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l: 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe:

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$. Ok, są równoległe.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$. Ok, są równoległe.

Chcielibyśmy skorzystać ze wzoru, ale zanim to zrobimy musimy wykonać jeszcze jeden krok - zapisać obie proste w odpowiedniej postaci.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k: 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l: 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$. Ok, są równoległe.

Chcielibyśmy skorzystać ze wzoru, ale zanim to zrobimy musimy wykonać jeszcze jeden krok - zapisać obie proste w odpowiedniej postaci. Mamy postać ogólną, ale odowiednie współczynniki nie są równe.

$$k: 2x - y + 2 = 0$$
$$l: 6x - 3y + 1 = 0$$

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Teraz mamy $A = 6, B = -3, C_1 = 6, C_2 = 1$.

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Teraz mamy $A = 6, B = -3, C_1 = 6, C_2 = 1$. Korzystamy ze wzoru:

$$d(k, l) = \frac{|6 - 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mamy już cztery bardzo ważne wzory z geometrii analitycznej.

Wzory z geometrii analitycznej

Mamy już cztery bardzo ważne wzory z geometrii analitycznej.

Dla prostych w postaci ogólnej $k : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $l : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ kąt ostry γ między tymi prostymi spełnia warunek:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mamy już cztery bardzo ważne wzory z geometrii analitycznej.

Dla prostych w postaci ogólnej $k: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $l: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ kąt ostry γ między tymi prostymi spełnia warunek:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$$

I jego odpowiednik dla prostych w postaci kierunkowej $k: y = a_1x + b_1$ i $l: y = a_2x + b_2$ kąt ostry γ między tymi prostymi spełnia warunek:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}\right|$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Mając dane dwie proste równoległe w postaci ogólnej $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ odległość między tymi prostymi dana jest wzorem:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Mając dane dwie proste równoległe w postaci ogólnej $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ odległość między tymi prostymi dana jest wzorem:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pamiętajmy, że w ostatnim wzorze musimy najpierw tak zapisać wzory, by współczynniki A i B zgadzały się w obu prostych.

Pierwsze trzy wzory są na kartach wzorów, ostatniego tam nie ma.

CZĘŚĆ DRUGA

Zadanie 3.84 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Zadanie 3.84 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

Zadanie 3.84 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|-2(a+2) + (a-1) + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}$$

Zadanie 3.84 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|-2(a+2)+(a-1)+3|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$|-a-2| = 10$$

Zadanie 3.84 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|-2(a+2) + (a-1) + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$|-a-2| = 10$$

To już proste równanie, dostajemy dwa rozwiązania $a = -12$ lub $a = 8$.

Zadanie 3.85

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$.
Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta.

Zadanie 3.85

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$ oraz $C(2, 0)$.
Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta.
Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

Zadanie 3.85

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$ oraz $C(2, 0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa linia $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

Zadanie 3.85

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa linia $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

AC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

Zadanie 3.85

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$ oraz $C(2, 0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa linia $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

AC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0 - 3)}{2 - (-2)} = -\frac{3}{4}$$

Zadanie 3.85

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa linia $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

AC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0 - 3)}{2 - (-2)} = -\frac{3}{4}$$

To daje równanie $y = -\frac{3}{4}x + b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b = \frac{3}{2}$, czyli równanie to $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

Zadanie 3.85

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa linia $x=-2$ lub w postaci ogólnej $x+2=0$.

AC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0-3)}{2-(-2)} = -\frac{3}{4}$$

To daje równanie $y=-\frac{3}{4}x+b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b=\frac{3}{2}$, czyli równanie to $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$. Przekształcając do postaci ogólnej otrzymujemy: $3x+4y-6=0$.

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0-2)}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0-2)}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

To daje równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b = 1$, czyli równanie to $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0 - 2)}{2 - (-2)} = -\frac{1}{2}$$

To daje równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b = 1$, czyli równanie to $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Zamieniając na postać ogólną otrzymamy równanie: $x + 2y - 2 = 0$.

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0-2)}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

To daje równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b = 1$, czyli równanie to $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Zamieniając na postać ogólną otrzymamy równanie: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy rówania protych zawierających boki:

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0 - 2)}{2 - (-2)} = -\frac{1}{2}$$

To daje równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b = 1$, czyli równanie to $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Zamieniając na postać ogólną otrzymamy równanie: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy rówania protych zawierających boki:

AB: $x + 2 = 0$

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0-2)}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

To daje równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b = 1$, czyli równanie to $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Zamieniając na postać ogólną otrzymamy równanie: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy rówania protych zawierających boki:

AB: $x + 2 = 0$

AC: $3x + 4y - 6 = 0$

Zadanie 3.85

BC Obliczamy współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0-2)}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

To daje równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$, podstawiając punkt C, otrzymujemy $b = 1$, czyli równanie to $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Zamieniając na postać ogólną otrzymamy równanie: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy rówania protych zawierających boki:

AB: $x + 2 = 0$

AC: $3x + 4y - 6 = 0$

BC: $x + 2y - 2 = 0$

Zadanie 3.85 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

Zadanie 3.85 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2, 3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

Zadanie 3.85 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x+2y-2=0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Zadanie 3.85 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x + 4y - 6 = 0$.

Zadanie 3.85 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

- h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x + 4y - 6 = 0$.

$$h_B = \frac{|-6+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

Zadanie 3.85 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x+2y-2=0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x+4y-6=0$.

$$h_B = \frac{|-6+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

h_C Liczymy odległość $C(2,0)$ od prostej zawierającej bok AB, czyli $x+2=0$.

Zadanie 3.85 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x+2y-2=0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x+4y-6=0$.

$$h_B = \frac{|-6+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

h_C Liczymy odległość $C(2,0)$ od prostej zawierającej bok AB, czyli $x+2=0$. Tutaj nie potrzeba wzoru, mamy pionową linię $x=-2$, ta odległość to oczywiście 4.

Zadanie 3.88

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k : 2x + y - 1 = 0$ oraz $m : 11x - 2y + 1 = 0$.

Zadanie 3.88

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$.

Zadanie 3.88

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

Zadanie 3.88

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k : 2x + y - 1 = 0$ oraz $m : 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

$$d(P, k) = \frac{|y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|y - 1|}{\sqrt{5}}$$

Zadanie 3.88

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

$$d(P, k) = \frac{|y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|y - 1|}{\sqrt{5}}$$

$$d(P, m) = \frac{|-2y + 1|}{\sqrt{11^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2y + 1|}{\sqrt{125}}$$

Zadanie 3.88

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k : 2x + y - 1 = 0$ oraz $m : 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

$$d(P, k) = \frac{|y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|y - 1|}{\sqrt{5}}$$

$$d(P, m) = \frac{|-2y + 1|}{\sqrt{11^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2y + 1|}{\sqrt{125}}$$

Chcemy rozwiązać równanie:

$$d(P, k) = d(P, m)$$

Zadanie 3.88

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{125}}$$

Zadanie 3.88

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{125}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

Zadanie 3.88

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{125}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

$$5|y-1| = |-2y+1|$$

Zadanie 3.88

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{125}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

$$5|y-1| = |-2y+1|$$

Ponieważ obie strony są dodatnie, najszybciej będzie podnieść je do kwadratu i tym samym pozbyć się wartości bezwzględnej (od razu też przeniosę wszystko na jedną stronę):

Zadanie 3.88

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{125}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

$$5|y-1| = |-2y+1|$$

Ponieważ obie strony są dodatnie, najszybciej będzie podnieść je do kwadratu i tym samym pozbyć się wartości bezwzględnej (od razu też przeniosę wszystko na jedną stronę):

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Zadanie 3.88

$$5^2(y-1)^2-(-2y+1)^2=0$$

Zadanie 3.88

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1) - (-2y+1))(5(y-1) + (-2y+1)) = 0$$

Zadanie 3.88

$$5^2(y-1)^2-(-2y+1)^2=0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1)-(-2y+1))(5(y-1)+(-2y+1))=0$$

Czyli:

$$(7y-6)(3y-4)=0$$

Zadanie 3.88

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1) - (-2y+1))(5(y-1) + (-2y+1)) = 0$$

Czyli:

$$(7y-6)(3y-4) = 0$$

Czyli $y = \frac{6}{7}$ lub $y = \frac{4}{3}$,

Zadanie 3.88

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1) - (-2y+1))(5(y-1) + (-2y+1)) = 0$$

Czyli:

$$(7y-6)(3y-4) = 0$$

Czyli $y = \frac{6}{7}$ lub $y = \frac{4}{3}$, szukane punkty to $(0, \frac{6}{7})$ i $(0, \frac{4}{3})$.

Zadanie 3.91

Chcemy znaleźć równania prostych zawierających dwusieczne kątów pod jakimi przecinają się proste $k : 4x + 2y + 1 = 0$ i $m : 11x - 2y + 7 = 0$.

Zadanie 3.91

Chcemy znaleźć równania prostych zawierających dwusieczne kątów pod jakimi przecinają się proste $k: 4x + 2y + 1 = 0$ i $m: 11x - 2y + 7 = 0$.

Pierwsza obserwacja jest taka, że będą dwie takie proste - w zależności od tego, czy rozważymy kąt ostry czy rozwarty.

Zadanie 3.91

Chcemy znaleźć równania prostych zawierających dwusieczne kątów pod jakimi przecinają się proste $k : 4x + 2y + 1 = 0$ i $m : 11x - 2y + 7 = 0$.

Pierwsza obserwacja jest taka, że będą dwie takie proste - w zależności od tego, czy rozważymy kąt ostry czy rozwarty. Druga ważna rzecz to przypomnienie sobie, czym jest dwusieczna - to zbiór punktów równoodległych od ramion kąta, a w naszym przypadków od danych prostych.

Zadanie 3.91

Chcemy znaleźć równania prostych zawierających dwusieczne kątów pod jakimi przecinają się proste $k: 4x + 2y + 1 = 0$ i $m: 11x - 2y + 7 = 0$.

Pierwsza obserwacja jest taka, że będą dwie takie proste - w zależności od tego, czy rozważymy kąt ostry czy rozwarty. Druga ważna rzecz to przypomnienie sobie, czym jest dwusieczna - to zbiór punktów równoodległych od ramion kąta, a w naszym przypadków od danych prostych.

Oznacza to, że chcemy znaleźć zbiór punktów takich, że $d(P, k) = d(P, m)$.

Zadanie 3.91

Chcemy znaleźć równania prostych zawierających dwusieczne kątów pod jakimi przecinają się proste $k: 4x + 2y + 1 = 0$ i $m: 11x - 2y + 7 = 0$.

Pierwsza obserwacja jest taka, że będą dwie takie proste - w zależności od tego, czy rozważymy kąt ostry czy rozwarty. Druga ważna rzecz to przypomnienie sobie, czym jest dwusieczna - to zbiór punktów równoodległych od ramion kąta, a w naszym przypadków od danych prostych.

Oznacza to, że chcemy znaleźć zbiór punktów takich, że $d(P, k) = d(P, m)$. O punkcie P nie wiem nic, więc oznaczymy go po prostu $P(x, y)$.

Zadanie 3.91

Rozwiązujemy:

$$\frac{|4x + 2y + 1|}{\sqrt{20}} = \frac{|11x - 2y + 7|}{\sqrt{125}}$$

Zadanie 3.91

Rozwiązujemy:

$$\frac{|4x+2y+1|}{\sqrt{20}} = \frac{|11x-2y+7|}{\sqrt{125}}$$

Znów skrócimy $\sqrt{5}$, pomnożymy obie strony przez 10 i otrzymamy:

$$5|4x+2y+1| = 2|11x-2y+7|$$

Zadanie 3.91

Rozwiązujemy:

$$\frac{|4x + 2y + 1|}{\sqrt{20}} = \frac{|11x - 2y + 7|}{\sqrt{125}}$$

Znów skrócimy $\sqrt{5}$, pomnożymy obie strony przez 10 i otrzymamy:

$$5|4x + 2y + 1| = 2|11x - 2y + 7|$$

Obie strony dodatnie, podnosimy do kwadratu i przenosimy na jedną stronę:

Zadanie 3.91

Rozwiązujemy:

$$\frac{|4x + 2y + 1|}{\sqrt{20}} = \frac{|11x - 2y + 7|}{\sqrt{125}}$$

Znów skrócimy $\sqrt{5}$, pomnożymy obie strony przez 10 i otrzymamy:

$$5|4x + 2y + 1| = 2|11x - 2y + 7|$$

Obie strony dodatnie, podnosimy do kwadratu i przenosimy na jedną stronę:

$$5^2(4x + 2y + 1)^2 - 2^2(11x - 2y + 7)^2 = 0$$

Zadanie 3.91

Rozwiązujemy:

$$\frac{|4x+2y+1|}{\sqrt{20}} = \frac{|11x-2y+7|}{\sqrt{125}}$$

Znów skrócimy $\sqrt{5}$, pomnożymy obie strony przez 10 i otrzymamy:

$$5|4x+2y+1| = 2|11x-2y+7|$$

Obie strony dodatnie, podnosimy do kwadratu i przenosimy na jedną stronę:

$$5^2(4x+2y+1)^2 - 2^2(11x-2y+7)^2 = 0$$

Różnica kwadratów:

$$(5(4x+2y+1)-2(11x-2y+7))(5(4x+2y+1)+2(11x-2y+7)) = 0$$

Zadanie 3.91

$$(5(4x+2y+1)-2(11x-2y+7))(5(4x+2y+1)+2(11x-2y+7))=0$$

Zadanie 3.91

$$(5(4x+2y+1)-2(11x-2y+7))(5(4x+2y+1)+2(11x-2y+7))=0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

$$(-2x+14y-9)(42x+6y+19)=0$$

Zadanie 3.91

$$(5(4x+2y+1)-2(11x-2y+7))(5(4x+2y+1)+2(11x-2y+7))=0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

$$(-2x+14y-9)(42x+6y+19)=0$$

Z powyższej postaci od razu otrzymujemy równania dwóch prostych:

$$-2x+14y-9=0$$

i

$$42x+6y+19=0$$

Zadanie 3.91

$$(5(4x+2y+1)-2(11x-2y+7))(5(4x+2y+1)+2(11x-2y+7))=0$$

Upraszczamy i otrzymujemy:

$$(-2x+14y-9)(42x+6y+19)=0$$

Z powyższej postaci od razu otrzymujemy równania dwóch prostych:

$$-2x+14y-9=0$$

i

$$42x+6y+19=0$$

To będą nasze proste zawierające dwusieczne kątów (czyli zbiory punktów równoodległych od prostych danych w zadaniu).

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.