# Rozwiązania zadań z optymalizacji

Na sprawdzianie (**i na maturze**) w zadaniach z optymalizacji proszę wszystko dokładnie opisywać.

Na sprawdzianie (**i na maturze**) w zadaniach z optymalizacji proszę wszystko dokładnie opisywać. Pamiętajcie o dziedzinie.

Na sprawdzianie (**i na maturze**) w zadaniach z optymalizacji proszę wszystko dokładnie opisywać. Pamiętajcie o dziedzinie. Dokładnie uzasadniajcie, że dana wartość to maksimum/minimum (badając znak pochodnej).

Na sprawdzianie (**i na maturze**) w zadaniach z optymalizacji proszę wszystko dokładnie opisywać. Pamiętajcie o dziedzinie. Dokładnie uzasadniajcie, że dana wartość to maksimum/minimum (badając znak pochodnej). Przy wprowadzaniu funkcji pomocniczej napiszcie, dlaczego to robicie.

**Zadanie 1**

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 $m^3$ istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

## Zadanie 1

Zaczniemy od rysunku i wprowadzimy odpowiednie oznaczenia.

# Zadanie 1

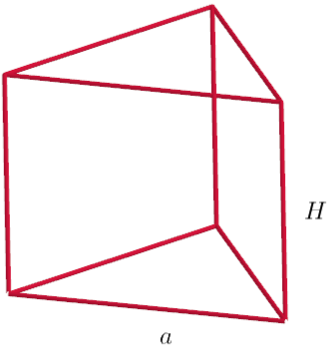
Zaczniemy od rysunku i wprowadzimy odpowiednie oznaczenia.
Graniastosłup prawidłowy - to znaczy w podstawie wielokąt foremny.
Prawidłowy trójkątny - w podstawie trójkąt równoboczny.

## Zadanie 1

Zaczniemy od rysunku i wprowadzimy odpowiednie oznaczenia. Graniastosłup prawidłowy - to znaczy w podstawie wielokąt foremny. Prawidłowy trójkątny - w podstawie trójkąt równoboczny. Przyjmijmy, że długość boku podstawy to $a$, natomiast wysokość graniastosłupa to $H$.

# Zadanie 1

Zaczniemy od rysunku i wprowadzimy odpowiednie oznaczenia. Graniastosłup prawidłowy - to znaczy w podstawie wielokąt foremny. Prawidłowy trójkątny - w podstawie trójkąt równoboczny. Przyjmijmy, że długość boku podstawy to $a$, natomiast wysokość graniastosłupa to $H$.



# Zadanie 1

Objętość tego graniastosłupa to:

$$V = P_p \times H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times H$$

# Zadanie 1

Objętość tego graniastosłupa to:

$$V = P_p \times H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times H$$

Natomiast pole powierzchni całkowitej to 2 razy pole podstawy i 3 ściany boczne:

$$P_C = 2 \times P_P + P_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

# Zadanie 1

Objętość tego graniastosłupa to:

$$V = P_p \times H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times H$$

Natomiast pole powierzchni całkowitej to 2 razy pole podstawy i 3 ściany boczne:

$$P_C = 2 \times P_P + P_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

Teraz naszym celem jest wyznaczenie $P_C$ jako funkcji jednej zmiennej (najlepiej $a$).

# Zadanie 1

Ze wzoru na objętość wyznaczamy $H$ (wiemy, że objętość wynosi $2m^3$):

# Zadanie 1

Ze wzoru na objętość wyznaczamy $H$ (wiemy, że objętość wynosi $2m^3$):

$$H = \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$$

# Zadanie 1

Ze wzoru na objętość wyznaczamy $H$ (wiemy, że objętość wynosi $2m^3$):

$$H = \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$$

To daje wzór na pole powierzchni całkowitej:

# Zadanie 1

Ze wzoru na objętość wyznaczamy $H$ (wiemy, że objętość wynosi $2m^3$):

$$H = \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$$

To daje wzór na pole powierzchni całkowitej:

$$P_C(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a}$$

# Zadanie 1

Ze wzoru na objętość wyznaczamy $H$ (wiemy, że objętość wynosi $2m^3$):

$$H = \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$$

To daje wzór na pole powierzchni całkowitej:

$$P_C(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a}$$

Musimy jeszcze ustalić dziedzinę.

# Zadanie 1

Ze wzoru na objętość wyznaczamy $H$ (wiemy, że objętość wynosi $2m^3$):

$$H = \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$$

To daje wzór na pole powierzchni całkowitej:

$$P_C(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a}$$

Musimy jeszcze ustalić dziedzinę.

Musimy mieć $a > 0$ i $H > 0$, ostatecznie dziedziną jest $a \in (0, \infty)$.

# Zadanie 1

Będziemy szukali minimum funkcji

$$P_C(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, \infty)$.

# Zadanie 1

Obliczamy pochodną:

$$P'_C(a) = a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2}$$

# Zadanie 1

Obliczamy pochodną:

$$P'_C(a) = a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2}$$

Teraz chcemy znaleźć jej miejsca zerowe i ustalić znak.

# Zadanie 1

Obliczamy pochodną:

$$P'_C(a) = a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2}$$

Teraz chcemy znaleźć jej miejsca zerowe i ustalić znak. W tym celu można zapisać:

$$P'_C(a) = a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{a^2}(a^3 - 8)$$

# Zadanie 1

Obliczamy pochodną:

$$P'_C(a) = a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2}$$

Teraz chcemy znaleźć jej miejsca zerowe i ustalić znak. W tym celu można zapisać:

$$P'_C(a) = a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{a^2}(a^3 - 8)$$

Teraz mamy $P'_C(a) = 0$ dla $a = 2$.

## Zadanie 1

Ustalmy znak pochodnej.

# Zadanie 1

Ustalmy znak pochodnej. Pamiętajmy o dziedzinie. Wystarczy ustalić znak tylko dla $a \in (0, \infty)$.

# Zadanie 1

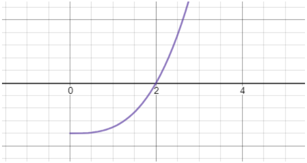
Ustalmy znak pochodnej. Pamiętajmy o dziedzinie. Wystarczy ustalić znak tylko dla $a \in (0, \infty)$.

Wyrażenie $\frac{\sqrt{3}}{a^2}$ będzie zawsze dodatnie, więc znak pochodnej zależy od $a^3 - 8$.

# Zadanie 1

Ustalmy znak pochodnej. Pamiętajmy o dziedzinie. Wystarczy ustalić znak tylko dla $a \in (0, \infty)$.

Wyrażenie $\frac{\sqrt{3}}{a^2}$ będzie zawsze dodatnie, więc znak pochodnej zależy od $a^3 - 8$. Pomocniczy wykres:

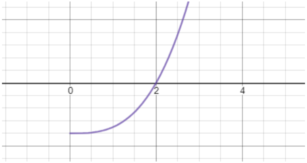



Czyli dla $a \in (0, 2)$ pochodna ujemna, funkcja malejąca,

# Zadanie 1

Ustalmy znak pochodnej. Pamiętajmy o dziedzinie. Wystarczy ustalić znak tylko dla $a \in (0, \infty)$.

Wyrażenie $\frac{\sqrt{3}}{a^2}$ będzie zawsze dodatnie, więc znak pochodnej zależy od $a^3 - 8$. Pomocniczy wykres:

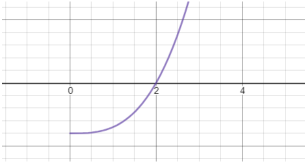



Czyli dla $a \in (0, 2)$ pochodna ujemna, funkcja malejąca, dla $a \in (2, \infty)$ pochodna dodatnia, funkcja rosnąca.

# Zadanie 1

Ustalmy znak pochodnej. Pamiętajmy o dziedzinie. Wystarczy ustalić znak tylko dla $a \in (0, \infty)$.

Wyrażenie $\frac{\sqrt{3}}{a^2}$ będzie zawsze dodatnie, więc znak pochodnej zależy od $a^3 - 8$. Pomocniczy wykres:

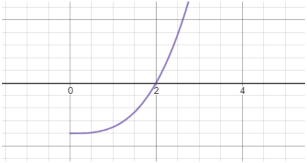



Czyli dla $a \in (0, 2)$ pochodna ujemna, funkcja malejąca, dla $a \in (2, \infty)$ pochodna dodatnia, funkcja rosnąca. Oznacza to, że dla $a = 2$ mamy minimum.

# Zadanie 1

Ustalmy znak pochodnej. Pamiętajmy o dziedzinie. Wystarczy ustalić znak tylko dla $a \in (0, \infty)$.

Wyrażenie $\frac{\sqrt{3}}{a^2}$ będzie zawsze dodatnie, więc znak pochodnej zależy od $a^3 - 8$. Pomocniczy wykres:




Czyli dla $a \in (0, 2)$ pochodna ujemna, funkcja malejąca, dla $a \in (2, \infty)$ pochodna dodatnia, funkcja rosnąca. Oznacza to, że dla $a = 2$ mamy minimum. Będzie to minimum globalne.

# Zadanie 1

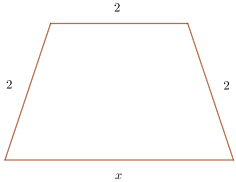
Ostatecznie otrzymujemy, że dla minimalnego pola powierzchni całkowitej krawędzie podstawy będą miały długość $2m$ (przypomnijmy tu sobie o jednostkach), natomiast wysokość będzie miała długość $H = \frac{8\sqrt{3}}{3\times 2^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}m$

**Zadanie 2**

Rozważamy trapezy równoramienne, których krótsza podstawa i ramiona mają długości po 2 $cm$. Oblicz, jaką długość będzie miała dłuższa podstawa trapezu o największym polu. Oblicz to pole.

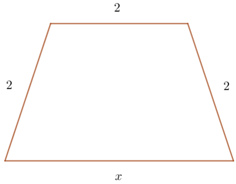
# Zadanie 2

Znów zaczniemy od rysunku i oznaczeń:

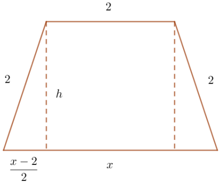


# Zadanie 2

Znów zaczniemy od rysunku i oznaczeń:




Dosrysujemy jeszcze wysokości i obliczymy długości odpowiednich odcinków.



# Zadanie 2

Teraz widzimy, że być może lepiej było wprowadzić inne oznaczenia, np. przez $x$ oznaczyć krótki odcinek, a całą podstawę $2+2x$.

# Zadanie 2

Teraz widzimy, że być może lepiej było wprowadzić inne oznaczenia, np. przez $x$ oznaczyć krótki odcinek, a całą podstawę $2 + 2x$. Spróbujemy jednak rozwiązać przy tych oznaczeniach.

# Zadanie 2

Teraz widzimy, że być może lepiej było wprowadzić inne oznaczenia, np. przez $x$ oznaczyć krótki odcinek, a całą podstawę $2 + 2x$. Spróbujemy jednak rozwiązać przy tych oznaczeniach.

Chcemy optymalizować pole:

$$P = \frac{(x+2) \times h}{2}$$

# Zadanie 2

Teraz widzimy, że być może lepiej było wprowadzić inne oznaczenia, np. przez $x$ oznaczyć krótki odcinek, a całą podstawę $2 + 2x$. Spróbujemy jednak rozwiązać przy tych oznaczeniach.

Chcemy optymalizować pole:

$$P = \frac{(x+2) \times h}{2}$$

Musimy więc wyznaczyć $h$ przy pomocy $x$.

# Zadanie 2

Teraz widzimy, że być może lepiej było wprowadzić inne oznaczenia, np. przez $x$ oznaczyć krótki odcinek, a całą podstawę $2 + 2x$. Spróbujemy jednak rozwiązać przy tych oznaczeniach.

Chcemy optymalizować pole:

$$P = \frac{(x+2) \times h}{2}$$

Musimy więc wyznaczyć $h$ przy pomocy $x$. Oczywiście skorzystamy z tw. Pitagorasa.

# Zadanie 2

Teraz widzimy, że być może lepiej było wprowadzić inne oznaczenia, np. przez $x$ oznaczyć krótki odcinek, a całą podstawę $2 + 2x$. Spróbujemy jednak rozwiązać przy tych oznaczeniach.

Chcemy optymalizować pole:

$$P = \frac{(x+2) \times h}{2}$$

Musimy więc wyznaczyć $h$ przy pomocy $x$. Oczywiście skorzystamy z tw. Pitagorasa.

$$h = \sqrt{2^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{x^2 - 4x + 4}{4}} = \sqrt{\frac{-x^2 + 4x + 12}{4}}$$

# Zadanie 2

Ostatecznie mamy:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

# Zadanie 2

Ostatecznie mamy:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

Czyli:

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

## Zadanie 2

Ostatecznie mamy:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

Czyli:

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

Musimy jeszcze ustalić dziedzinę. $x$ ma być dłuższą podstawą, więc $x > 2$. Wysokość musi być większa od 0, musimy mieć $-x^2 + 4x + 12 > 0$, co daje $x \in (-2, 6)$.

# Zadanie 2

Ostatecznie mamy:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

Czyli:

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

Musimy jeszcze ustalić dziedzinę. $x$ ma być dłuższą podstawą, więc $x > 2$. Wysokość musi być większa od 0, musimy mieć $-x^2 + 4x + 12 > 0$, co daje $x \in (-2, 6)$. Ostatecznie dziedziną jest $x \in (2, 6)$.

# Zadanie 2

Ostatecznie mamy:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

Czyli:

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

Musimy jeszcze ustalić dziedzinę. $x$ ma być dłuższą podstawą, więc $x > 2$. Wysokość musi być większa od 0, musimy mieć $-x^2 + 4x + 12 > 0$, co daje $x \in (-2, 6)$. Ostatecznie dziedziną jest $x \in (2, 6)$. Ten wynik zgadza się z naszymi intuicjami (dłuższa podstawa musi być krótsza od 6, by dało się skonstruować zadany trapez).

# Zadanie 2

Szukamy maksimum funkcji:

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

dla $x \in (2, 6)$

# Zadanie 2

Wprowadźmy zmienne pod pierwiastek, otrzymamy:

$$P(x) = \frac{1}{4}\sqrt{(x+2)^2(-x^2+4x+12)} = \frac{1}{4}\sqrt{(x^2+4x+4)(-x^2+4x+12)}$$

# Zadanie 2

Wprowadźmy zmienne pod pierwiastek, otrzymamy:

$$P(x) = \frac{1}{4}\sqrt{(x+2)^2(-x^2+4x+12)} = \frac{1}{4}\sqrt{(x^2+4x+4)(-x^2+4x+12)}$$

Teraz wprowadzimy funkcję pomocniczą:

$$f(x) = (x^2+4x+4)(-x^2+4x+12)$$

# Zadanie 2

Wprowadźmy zmienne pod pierwiastek, otrzymamy:

$$P(x) = \frac{1}{4}\sqrt{(x+2)^2(-x^2+4x+12)} = \frac{1}{4}\sqrt{(x^2+4x+4)(-x^2+4x+12)}$$

Teraz wprowadzimy funkcję pomocniczą:

$$f(x) = (x^2+4x+4)(-x^2+4x+12)$$

Zaznaczamy, że maksimum funkcji $f(x)$ będzie zarazem maksimum funkcji $P(x)$.

# Zadanie 2

Szukamy maksimum funkcji:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 4)(-x^2 + 4x + 12)$$

dla $x \in (2, 6)$

# Zadanie 2

Szukamy maksimum funkcji:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 4)(-x^2 + 4x + 12)$$

dla $x \in (2, 6)$

Obliczymy pochodną i jej miejsca zerowe oraz znak.

# Zadanie 2

Szukamy maksimum funkcji:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 4)(-x^2 + 4x + 12)$$

dla $x \in (2, 6)$

Obliczymy pochodną i jej miejsca zerowe oraz znak. Możemy wymnożyć wszystko albo zastosować wzór na pochodną iloczynu.

# Zadanie 2

Szukamy maksimum funkcji:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 4)(-x^2 + 4x + 12)$$

dla $x \in (2, 6)$

Obliczymy pochodną i jej miejsca zerowe oraz znak. Możemy wymnożyć wszystko albo zastosować wzór na pochodną iloczynu. Zrobimy to drugie:

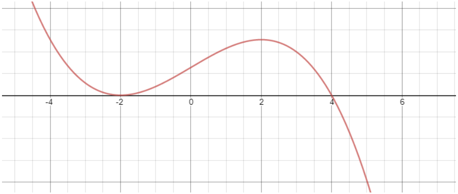
$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 4)(-x^2 + 4x + 12) + (x^2 + 4x + 4)(-2x + 4) = \\ &= 2(x + 2)(6 - x)(2 + x) - 2(x + 2)^2(x - 2) = \\ &= 2(x + 2)^2(8 - 2x) = 4(x + 2)^2(4 - x) \end{aligned}$$

# Zadanie 2

Narysujemy wykres pochodnej:

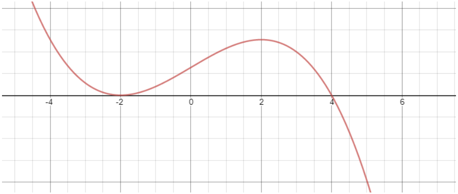
# Zadanie 2

Narysujemy wykres pochodnej:



# Zadanie 2

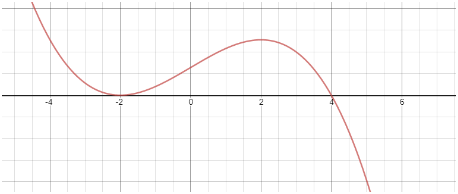
Narysujemy wykres pochodnej:



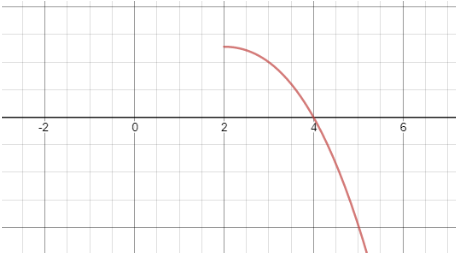

Ponieważ $x \in (2, 6)$, to nas interesuje tylko:

# Zadanie 2

Narysujemy wykres pochodnej:




Ponieważ $x \in (2, 6)$, to nas interesuje tylko:



# Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca,

# Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca, dla $x \in (4, 6)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja malejąca.

## Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca, dla $x \in (4, 6)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja malejąca. W związku z tym dla $x = 4$ mamy maksimum.

# Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca, dla $x \in (4, 6)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja malejąca. W związku z tym dla $x = 4$ mamy maksimum. Będzie to maksimum globalne.

# Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca, dla $x \in (4, 6)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja malejąca. W związku z tym dla $x = 4$ mamy maksimum. Będzie to maksimum globalne.

Musimy jeszcze obliczyć pole.

# Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca, dla $x \in (4, 6)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja malejąca. W związku z tym dla $x = 4$ mamy maksimum. Będzie to maksimum globalne.

Musimy jeszcze obliczyć pole.

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

# Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca, dla $x \in (4, 6)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja malejąca. W związku z tym dla $x = 4$ mamy maksimum. Będzie to maksimum globalne.

Musimy jeszcze obliczyć pole.

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

Czyli:

$$P(4) = \frac{6 \times \sqrt{-16 + 16 + 12}}{4} = 3\sqrt{3}$$

# Zadanie 2

Dla $x \in (2, 4)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca, dla $x \in (4, 6)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja malejąca. W związku z tym dla $x = 4$ mamy maksimum. Będzie to maksimum globalne.

Musimy jeszcze obliczyć pole.

$$P(x) = \frac{(x+2) \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4}$$

Czyli:

$$P(4) = \frac{6 \times \sqrt{-16 + 16 + 12}}{4} = 3\sqrt{3}$$

Dłuższa podstawa będzie miała długość $4cm$, a pole wyniesie $3\sqrt{3}cm^2$.

**Zadanie 3**

Dana jest funkcja $f(x) = 6x + x^2 - x^3$. Niech $A$ będzie punktem na części wykresu funkcji $f$ znajdującej się w I ćwiartce układu współrzędnych. Niech $B$ będzie rzutem prostokątnym punktu $A$ na oś $X$. Oblicz współrzędną $x$ punktu $A$, dla którego pole trójkąta $OAB$, gdzie $O$ jest środkiem układu współrzędnych, jest największe.

## Zadanie 3

Najpierw narysujmy wykres funkcji $f(x)$,

# Zadanie 3

Najpierw narysujmy wykres funkcji $f(x)$, w tym celu rozłożymy jej wzór na czynniki:

$$f(x) = x(6 + x - x^2) = x(2 + x)(3 - x)$$

# Zadanie 3

Najpierw narysujmy wykres funkcji $f(x)$, w tym celu rozłożymy jej wzór na czynniki:

$$f(x) = x(6 + x - x^2) = x(2 + x)(3 - x)$$

Czyli miejsca zerowe dla $x = 0$, $x = -2$ oraz $x = 3$.

# Zadanie 3

Najpierw narysujmy wykres funkcji $f(x)$, w tym celu rozłożymy jej wzór na czynniki:

$$f(x) = x(6 + x - x^2) = x(2 + x)(3 - x)$$

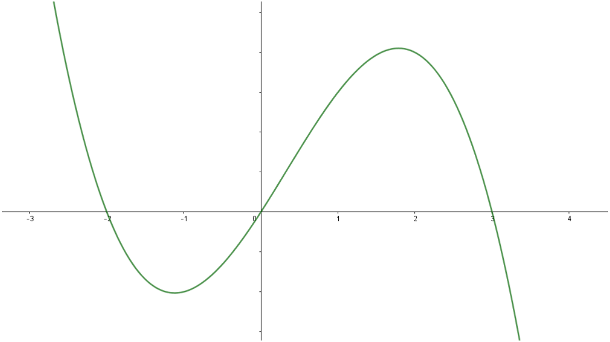
Czyli miejsca zerowe dla $x = 0$, $x = -2$ oraz $x = 3$. Rysowanie zaczynamy od prawej strony, od dołu:

# Zadanie 3

Najpierw narysujmy wykres funkcji $f(x)$, w tym celu rozłożymy jej wzór na czynniki:

$$f(x) = x(6 + x - x^2) = x(2 + x)(3 - x)$$

Czyli miejsca zerowe dla $x = 0$, $x = -2$ oraz $x = 3$. Rysowanie zaczynamy od prawej strony, od dołu:

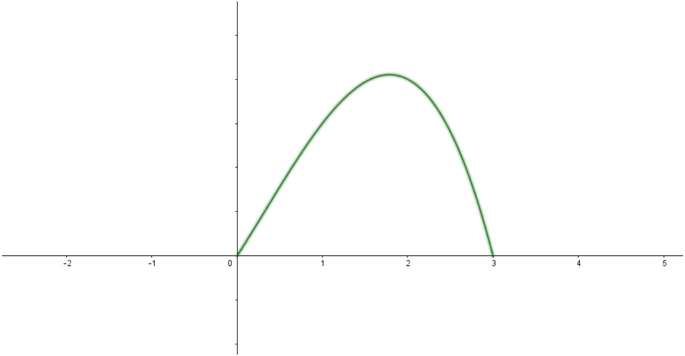


# Zadanie 3

Nas interesuje tylko pierwsza ćwiartka, czyli:

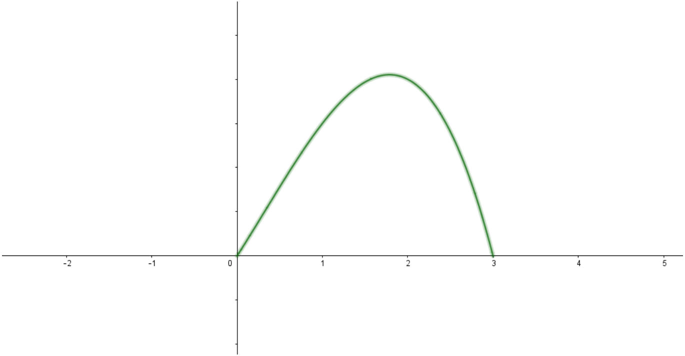
# Zadanie 3

Nas interesuje tylko pierwsza ćwiartka, czyli:



# Zadanie 3

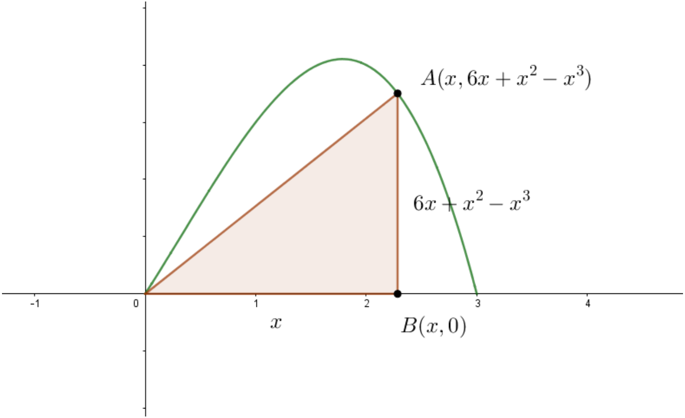
Nas interesuje tylko pierwsza ćwiartka, czyli:




dodajmy punkty $A$ i $B$ i oznaczmy trójkąt $OAB$ wraz z jego bokami.

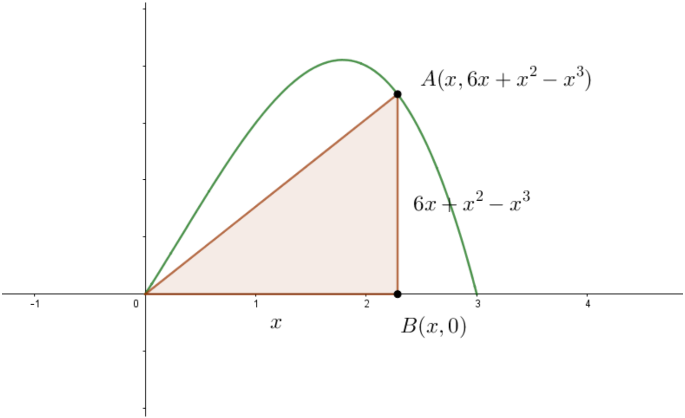
# Zadanie 3

Otrzymujemy następujący rysunek:



# Zadanie 3

Otrzymujemy następujący rysunek:




Podstawa ma długość $x$, wysokość ma długość $6x + x^2 - x^3$.

# Zadanie 3

Pole trójkąta

$$P(x) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}x(6x + x^2 - x^3) = 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

# Zadanie 3

Pole trójkąta

$$P(x) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}x(6x + x^2 - x^3) = 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

Dziedzina: oczywiście $a$ i $h$ muszą być dodatnie, to daje $x \in (0, 3)$.

# Zadanie 3

Szukamy maksimum funkcji:

$$P(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

dla $x \in (0, 3)$.

# Zadanie 3

Obliczymy pochodną, jej miejsca zerowe i ustalimy znak.

# Zadanie 3

Obliczymy pochodną, jej miejsca zerowe i ustalimy znak.

$$P(x) = 6x + \frac{3}{2}x^2 - 2x^3 = \frac{3}{2}x(12 + x - 4x^2)$$

## Zadanie 3

Obliczymy pochodną, jej miejsca zerowe i ustalimy znak.

$$P(x) = 6x + \frac{3}{2}x^2 - 2x^3 = \frac{3}{2}x(12 + x - 4x^2)$$

Musimy znaleźć miejsca zerowe, jedno to oczywiście $x = 0$, niestety dalej trzeba użyć $\Delta$.

## Zadanie 3

Obliczymy pochodną, jej miejsca zerowe i ustalimy znak.

$$P(x) = 6x + \frac{3}{2}x^2 - 2x^3 = \frac{3}{2}x(12 + x - 4x^2)$$

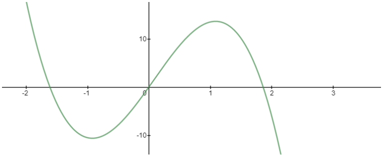
Musimy znaleźć miejsca zerowe, jedno to oczywiście $x = 0$, niestety dalej trzeba użyć $\Delta$. Pozostałe dwa miejsca zerowe to $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{193}}{8}$

# Zadanie 3

Możemy naszkicować wykres pochodnej:

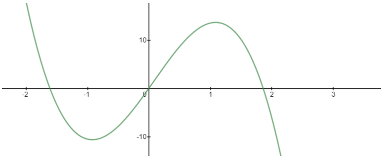
# Zadanie 3

Możemy naszkicować wykres pochodnej:



# Zadanie 3

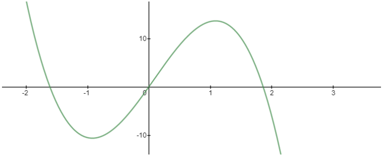
Możemy naszkicować wykres pochodnej:



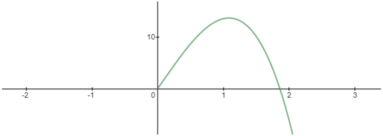

Nas interesuje tylko część dla $x \in (0, 3)$, czyli:

# Zadanie 3

Możemy naszkicować wykres pochodnej:




Nas interesuje tylko część dla $x \in (0, 3)$, czyli:



# Zadanie 3

Dla $x \in \left(0, \frac{1+\sqrt{193}}{8}\right)$ pochodna jest dodatnia, czyli funkcja rośnie, dla $x \in \left(\frac{1+\sqrt{193}}{8}, 3\right)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja maleje.

# Zadanie 3

Dla $x \in \left(0, \dfrac{1+\sqrt{193}}{8}\right)$ pochodna jest dodatnia, czyli funkcja rośnie, dla $x \in \left(\dfrac{1+\sqrt{193}}{8}, 3\right)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja maleje. Dla $x = \dfrac{1+\sqrt{193}}{8}$ mamy więc maksimum, które będzie maksimum globalnym.

# Zadanie 3

Dla $x \in \left(0, \frac{1+\sqrt{193}}{8}\right)$ pochodna jest dodatnia, czyli funkcja rośnie, dla $x \in \left(\frac{1+\sqrt{193}}{8}, 3\right)$ pochodna jest ujemna, czyli funkcja maleje. Dla $x = \frac{1+\sqrt{193}}{8}$ mamy więc maksimum, które będzie maksimum globalnym.

Współrzędną $x$ punktu $A$ będzie $x = \frac{1+\sqrt{193}}{8}$.