II sposób - Ze wzoru (1.17b) mamy $x^4-4x^2+5=(x^2)^2-2\cdot2\cdot x^2+2^2+1=(x^2-2)^2+1$, czyli $f(x)=(x^2-2)^2+1$, $x\in R$. Ponieważ $(x^2-2)^2\geq0$ dla dowolnej liczby x, więc najmniejsza wartość funkcji f jest równa 1 i jest przyjmowana na przykład dla argumentu $\sqrt{2}$.

5.52. najmniejsza wartość: 3 (11.2R, 11.1R, 11.5R)

Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna.

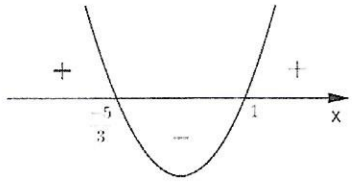
I sposób (ogólny) - Badamy wartości funkcji w punktach krytycznych (o ile istnieją, (**5.25**)) i obliczamy granice jednostronne na końcach otwartego przedziału, w którym funkcja jest określona (jak w rozwiązaniu zadania 5.51).

Obliczamy pochodną funkcji f: $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$, gdzie $x\in(0,10)$, skąd $f'(x)=\frac{2x^3-2}{x^2}$. Wówczas $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Funkcja f ma tylko jeden punkt krytyczny $x=1$; $f(1)=3$. Następnie obliczamy granice jednostronne: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3+2}{x}=+\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to10^-}f(x)=100{,}2>f(1)$. Zatem liczba 3 jest najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $(0,10)$.

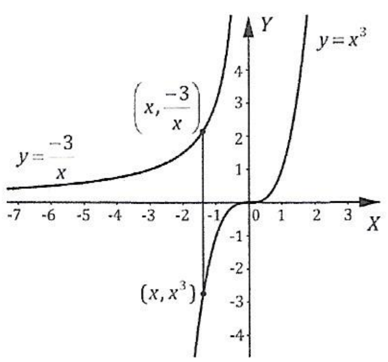
II sposób - Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(0,10)$, a jej pochodna jest równa 0 tylko w jednym punkcie, to wartość najmniejszą (największą) funkcji w tym przedziale możemy wyznaczyć (o ile istnieje), badając monotoniczność tej funkcji. Na mocy (**5.19**) obliczamy pochodną funkcji f, wyznaczamy jej jedyne miejsce zerowe i badamy znak pochodnej w sąsiedztwie tego miejsca zerowego: $f'(x)=\frac{2x^3-2}{x^2}$, $x\in(0,10)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$ oraz $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(1,10)$. W przedziale $(0,1)$ funkcja f jest malejąca, a w przedziale $(1,10)$ funkcja f jest rosnąca. Na podstawie (**5.26**) w punkcie $x=1$ funkcja ma minimum lokalne równe $f(1)$, czyli 3. Jest to jedyne ekstremum funkcji f. Liczba 3 jest również najmniejszą wartością funkcji f.

5.53. $ZW=\langle4,28)$ (11.2R, 11.1R, 11.5R)

Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. Wyznaczamy punkty krytyczne (**5.25**): $f'(x)=3x^2+2x-5$; skąd $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-5}{3},1\right\}$. Obliczamy wartości funkcji w tych punktach: $f\left(\frac{-5}{3}\right)=13\frac{13}{27}$; $f(1)=4$. Ze szkicu wykresu pochodnej wnioskujemy, że liczba $13\frac{13}{27}$ stanowi maksimum lokalne zaś liczba 4 - minimum lokalne funkcji f. Sprawdzamy, czy te wielkości są odpowiednio największą (najmniejszą) wartością funkcji f, obliczając granice jednostronne funkcji na końcach przedziału: $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=13$, $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=28$. Z ciągłości funkcji f w przedziale otwartym $(-2,3)$ wynika, że funkcja przyjmuje wartości nie mniejsze niż 4 i mniejsze niż 28 (nie istnieje wartość największa funkcji f, natomiast minimum lokalne jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji f); stąd $ZW=\langle4,28)$.



5.54. 4 (11.1R, 11.6R)



Niech $d(x)$ oznacza długość odcinka w zależności od x $(x<0)$. Mamy $d(x)=\left|x^3+\frac{3}{x}\right|$; $d(x)=-x^3-\frac{3}{x}$, bo $x<0$. Wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji d. Mamy $d'(x)=-3x^2+\frac{3}{x^2}$, $x<0$; $d'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$; $\lim\limits_{x\to0^-}d(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}d(x)=+\infty$, $d(-1)=4$ (zobacz rozwiązanie zadania 5.51). Najkrótszy odcinek ma długość 4. (Funkcja d ma tylko jeden punkt krytyczny, więc można było skorzystać z monotoniczności funkcji f, zamiast liczyć granice- jak w rozwiązaniu zadania 5.52).

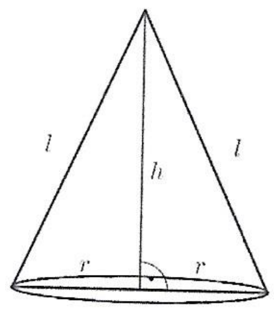
5.55. $V=250\sqrt{2}\text{cm}^3$ (11.6R, 11.2G)

Niech x oznacza długość krawędzi podstawy, h - wysokość prostopadłościanu. Wówczas $P_c=300=2x^2+4xh$, skąd $h=\frac{150-x^2}{2x}$, gdzie $x\in(0,5\sqrt{6})$, bo $x>0$ i $h>0$. Wyznaczamy funkcję objętości V prostopadłościanu w zależności od x:

$V(x)=x^2\cdot\frac{150-x^2}{2x}$, czyli $V(x)=\frac{-1}{2}x^3+75x$, gdzie $x\in(0,5\sqrt{6})$. Badamy istnienie punktów krytycznych (**5.25**). W tym celu wyznaczamy pochodną funkcji V, bo funkcja V jest ciągła i różniczkowalna: $V'(x)=\frac{-3}{2}x^2+75$, gdzie $x\in(0,5\sqrt{6})$. Wówczas $V'(x)=0\Leftrightarrow x=5\sqrt{2}$ (funkcja ma jeden punkt krytyczny, jak w rozwiązaniu zadania 5.52). Ponieważ $V'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,5\sqrt{2})$ oraz $V'(x)<0\Leftrightarrow x\in(5\sqrt{2},5\sqrt{6})$, więc funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0,5\sqrt{2})$ i malejąca w przedziale $(5\sqrt{2},5\sqrt{6})$; dla $x=5\sqrt{2}$ funkcja V ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie wartością największą funkcji V, równą $V(5\sqrt{2})$, czyli $250\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^3)$.

5.56. $r=4$

(11.6R, 11.2G)



Z danych informacji wiemy, że $2r+2l=20$, gdzie r – oznacza promień podstawy stożka, l – długość tworzącej stożka. Wówczas $l=10-r$, $r>0$, $l>r$. Wyznaczamy objętość stożka w zależności od r. Ponieważ $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$, gdzie $h=\sqrt{l^2-r^2}$, więc $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\sqrt{(10-r)^2-r^2}$, czyli $V(r)=\frac{\pi}{3}\sqrt{100r^4-20r^5}$. Z założeń $r>0$, $l>r$ wynika, że dziedziną funkcji V jest przedział $(0,5)$. Ponieważ funkcja $y=\frac{\pi}{3}\sqrt{x}$, $x>0$, jest rosnąca, więc funkcja $y=\frac{\pi}{3}\sqrt{f(r)}$ będzie przyjmować największą wartość wtedy, gdy funkcja $f(r)=100r^4-20r^5$, gdzie $r\in(0,5)$, będzie miała największą wartość. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. Wyznaczamy pochodną funkcji f (**5.17**), (**5.18b**): $f'(r)=400r^3-100r^4=100r^3(4-r)$, $r\in(0,5)$. Wówczas $f'(r)=0\Leftrightarrow r=4$ (bo $r>0$). Wówczas $f'(r)>0\Leftrightarrow r\in(0,4)$ oraz $f'(r)<0\Leftrightarrow r\in(4,5)$. W przedziale $(0,4)$ funkcja f jest rosnąca, zaś w przedziale $(4,5)$ jest malejąca; stąd dla $r=4$ funkcja f ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie wartością największą funkcji f; wtedy objętość stożka jest największa. (Zamiast badać monotoniczność funkcji f można było obliczyć granice funkcji f na końcach przedziału – zobacz rozwiązanie zadania 5.52).

5.57.

(11.6R, 11.2G, 1.3P)

Niech V oznacza objętość walca, $V=1\mathrm{dm}^3$; r – promień podstawy walca, h – wysokość walca. Wówczas $\pi r^2\cdot h=1$, skąd $h=\frac{1}{\pi r^2}$, $r>0$. Wyznaczamy pole P powierzchni całkowitej walca w zależności od r: $P(r)=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{1}{\pi r^2}$, czyli $P(r)=2\pi r^2+\frac{2}{r}$, gdzie $r\in(0,+\infty)$. Funkcja P jest ciągła i różniczkowalna. Obliczamy pochodną funkcji P: $P'(r)=4\pi r-\frac{2}{r^2}$, skąd $P'(r)=\frac{4\pi r^3-2}{r^2}$, $r\in(0,+\infty)$. Mianownik otrzymanego wyrażenia jest dodatni; z własności funkcji $y=x^3$ wynika, że $P'(r)=0\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$; $P'(r)<0\Leftrightarrow r\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)$ oraz $P'(r)>0\Leftrightarrow r\in\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}},+\infty\right)$. Funkcja P jest malejąca w przedziale $\left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)$ i rosnąca w przedziale $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}},+\infty\right)$. Funkcja P w punkcie $r_m=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ ma minimum lokalne, równe $P\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)$, które jest jednocześnie wartością największą funkcji P. (Zamiast badać monotoniczność funkcji V można było obliczyć granice jednostronne tej funkcji na końcach przedziału– zobacz rozwiązanie z. 5.52). Mamy $\frac{1}{8}<\frac{1}{2\pi}<\frac{8}{27}$. Z własności pierwiastków otrzymujemy $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}<\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}<\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$, czyli $\frac{1}{2}<\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}<\frac{2}{3}$. Zatem $0{,}5<\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}<0{,}7$. Promień podstawy puszki o najmniejszej powierzchni całkowitej jest równy $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ dm, zatem jest większy od 5 cm i mniejszy od 7 cm, c.k.d.

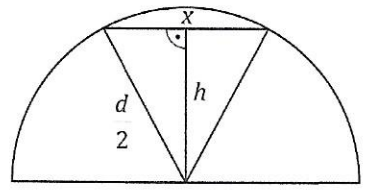
5.58. a) dla 20 par, 120 zł na parę b) dla 32 par; 95,25zł na parę; koszt całkowity to 3048 zł (11.6R)

a) W rozwiązaniu zadania skorzystamy z rachunku pochodnych; w tym celu wzór funkcji $y=K(x)$ rozpatrujemy w przedziale $\langle 10,100\rangle$. Wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji $y=K(x)$ – zobacz rozwiązanie zadania 5.50. Mamy $K'(x)=4x-\frac{32000}{x^2}$, $x\in(10,100)$; $K'(x)=0\Leftrightarrow x=20$; $K(20)=2400$. Ponadto $K(10)=3400$, $K(100)=20320$. Zatem liczba 2400 jest wartością najmniejszą funkcji $y=K(x)$. Koszt zorganizowania balu jest najmniejszy dla 20 par. Wtedy średni koszt przypadający na jedną parę jest równy 120 zł.

b) Funkcja $S(x)=\frac{K(x)}{x}$ opisuje średni koszt zorganizowania balu przypadający na jedną parę. Szukamy najmniejszej wartości funkcji $S(x)=2x+\frac{32000}{x^2}$ w przedziale $\langle 10,100\rangle$. Mamy $S(10)=340$, $S(100)=203{,}2$. $S'(x)=2-\frac{64000}{x^3}$, $x\in(10,100)$. Zatem $S'(x)=0 \Leftrightarrow x=20\sqrt[3]{4}$; $S'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(20\sqrt[3]{4},100\right)$; $S'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,20\sqrt[3]{4}\right)$. W punkcie $20\sqrt[3]{4}$ funkcja S ma minimum lokalne, równe $S_{\min}\left(20\sqrt[3]{4}\right)=60\sqrt[3]{4}$; ponadto $60\sqrt[3]{4}<203{,}2<340$. Liczba $60\sqrt[3]{4}$ jest wartością najmniejszą funkcji S. Ponieważ liczba par (x) jest liczbą całkowitą, więc obliczamy: $20\sqrt[3]{4}\approx 31{,}7$; $S(31)\approx 95{,}30$; $S(32)\approx 95{,}25$. Średni koszt zorganizowania balu przypadający na jedną parę jest najmniejszy dla 32 par i wynosi 95,25 zł. Wówczas całkowity koszt zorganizowania balu to $32\cdot 95{,}25$ (zł), czyli 3048 zł.

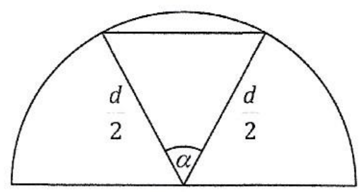
5.59. Trójkąt o bokach długości $\frac{d}{2}$, $\frac{d}{2}$, $\frac{d\sqrt{2}}{2}$; $P=\frac{d^2}{8}$. (11.6R, 11.1R, 7.4P)

I sposób – Oznaczamy przez x długość cięciwy. Wówczas wysokość trójkąta poprowadzona na tę cięciwę jest równa $\sqrt{\frac{d^2}{4}-\frac{x^2}{4}}$. Niech $P(x)$ będzie polem trójkąta równoramiennego, określonym w zależności od x. $P(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2d^2}{4}-\frac{x^4}{4}}$, $x\in(0,d)$. Ponieważ funkcja $y=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, $t>0$, jest rosnąca, więc funkcja $y=\frac{1}{2}\sqrt{f(x)}$ będzie przyjmować największą wartość dla takiego argumentu, dla którego funkcja $f(x)=\frac{x^2d^2}{4}-\frac{x^4}{4}$, $x\in(0,d)$, będzie miała największą wartość. Obliczamy (zobacz rozwiązanie zadania 5.52): $f'(x)=\frac{xd^2}{2}-x^3$, $x\in(0,d)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{d}{\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}P(x)=\lim\limits_{x\to d^-}P(x)=0$; $P\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)=\frac{d^2}{8}$.



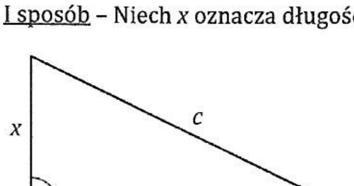
Trójkąt równoramienny ma największe pole równe $\frac{d^2}{8}$; wówczas boki trójkąta mają długość $\frac{d}{2}$, $\frac{d}{2}$, $\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

II sposób – Oznaczamy kąt między ramionami trójkąta przez α. Niech $P(\alpha)$ oznacza pole trójkąta równoramiennego w zależności od α. Wówczas (**7.5b**) otrzymujemy $P(\alpha)=\frac{1}{8}d^2\sin\alpha$, $\alpha\in(0°,180°)$; $P(\alpha)$ przyjmuje największą wartość wtedy, gdy $\sin\alpha$ ma największą wartość, czyli wtedy, gdy $\sin\alpha=1$, skąd $\alpha=90°$.



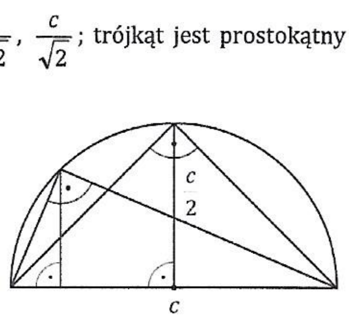
5.60. trójkąt prostokątny równoramienny, $P=\frac{c^2}{4}$ (11.6R, 11.1R, 7.1P)

I sposób – Niech x oznacza długość jednej z przyprostokątnych, $P(x)$ jest polem trójkąta określonym w zależności od x.



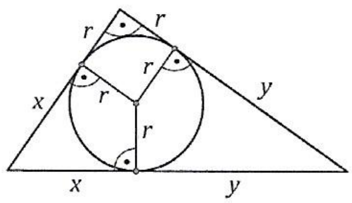
Długość drugiej przyprostokątnej jest równa $\sqrt{c^2-x^2}$, więc $P(x)=\frac{1}{2}\sqrt{c^2x^2-x^4}$, $x\in(0,c)$. Ponieważ funkcja $y=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, $t>0$ jest rosnąca, więc funkcja $y=\frac{1}{2}\sqrt{f(x)}$ ma wartość największą w takim punkcie, w którym funkcja $f(x)=c^2x^2-x^4$, $x\in(0,c)$, przyjmuje największą wartość. Obliczamy (zobacz rozwiązanie zadania 5.52): $f'(x)=2c^2x-4x^3$, $x\in(0,c)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{c}{\sqrt{2}}$; $P\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{c^2}{4}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}P(x)=\lim\limits_{x\to c^-}P(x)=0$. Trójkąt prostokątny ma największe pole równe $\frac{c^2}{4}$; wówczas przyprostokątne trójkąta mają długość $\frac{c}{\sqrt{2}}$, $\frac{c}{\sqrt{2}}$; trójkąt jest prostokątny równoramienny.

II sposób – Kreślimy półokrąg o średnicy c. Jeśli wybierzemy dowolne punkty na tym półokręgu (różne od końców średnicy) i połączymy je z końcami średnicy, to otrzymamy wszystkie możliwe trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej c (zobacz (**7.21b**)). Spośród takich trójkątów największe pole będzie miał ten trójkąt, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest najdłuższa, czyli równa $0{,}5c$. Wówczas trójkąt jest równoramienny, a jego pole wynosi $0{,}25c^2$.



III sposób – Oznaczamy przez α kąt ostry trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej c. Wówczas przyprostokątne mają długość $c \cdot \sin\alpha$ i $c \cdot \cos\alpha$. Niech $P(\alpha)$ oznacza pole takiego trójkąta wyrażone w zależności od α. Mamy $P(\alpha)=\frac{c^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, czyli $P(\alpha)=\frac{c^2}{4}\cdot\sin 2\alpha$ (zobacz (**6.7a**)), gdzie $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$. $P(\alpha)$ przyjmuje największą wartość wtedy, gdy $\sin 2\alpha$ ma największą wartość, czyli wtedy, gdy $\sin 2\alpha=1$, skąd $\alpha=45^\circ$.

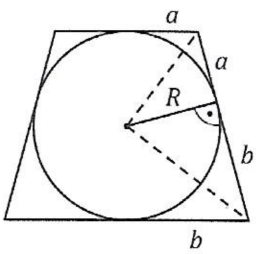
5.61. trójkąt prostokątny równoramienny o bokach długości: $\left(2+\sqrt{2}\right)r$, $\left(2+\sqrt{2}\right)r$, $\left(2+2\sqrt{2}\right)r$ (7.2P, 2.6R, 11.6R)



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Odcinki wyznaczone przez wierzchołki trójkąta prostokątnego i przez punkty styczności okręgu z bokami trójkąta mają odpowiednio długości: x, y, r. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $(x+r)^2+(y+r)^2=(x+y)^2$, skąd $y=\frac{xr+r^2}{x-r}$, $x>r$. Zatem $x+y=\frac{x^2+r^2}{x-r}$. Szukamy najmniejszej wartość funkcji $f(x)=\frac{x^2+r^2}{x-r}$, gdzie $x\in(r,+\infty)$. Obliczamy (**5.18e**): $f'(x)=\frac{x^2-2rx-r^2}{(x-r)^2}$, $x\in(r,+\infty)$. Wówczas (zobacz rozwiązanie zadania 5.52) mamy: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(1+\sqrt{2}\right)r$; $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(r, r+r\sqrt{2}\right)$; $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(r+r\sqrt{2},+\infty\right)$. Zatem w punkcie $\left(1+\sqrt{2}\right)r$ funkcja f ma minimum lokalne, które jest najmniejszą wartością tej funkcji. Wówczas $y=\left(1+\sqrt{2}\right)r$. Trójkąt prostokątny o najkrótszej przeciwprostokątnej jest trójkątem równoramiennym.

5.62. Kwadrat o boku $2R$ (7.1R, 11.1R, 11.6R)

I sposób – Oznaczamy długości podstaw trapezu przez $2a$ i $2b$. Wówczas (zobacz zadanie 7.34) $R^2=ab$, skąd $b=\frac{R^2}{a}$.



Niech $P(a)$ oznacza pole trapezu w zależności od a; $P(a)=\left(a+\frac{R^2}{a}\right)\cdot 2R$, $a\in(0,+\infty)$. Zatem $P'(a)=\left(1-\frac{R^2}{a^2}\right)\cdot 2R$, $a\in(0,+\infty)$; $P'(a)=0 \Leftrightarrow a=R$; $\lim\limits_{a\to 0^+}P(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}P(a)=+\infty$; $P(R)=4R^2$ (zobacz rozwiązanie zadania 5.52). Pole trapezu jest najmniejsze wtedy, gdy $a=R$, czyli wtedy, gdy trapez jest kwadratem.

II sposób – Oznaczamy długości podstaw trapezu przez $2a$ i $2b$. Wówczas pole P trapezu możemy zapisać w postaci $P=(a+b)\cdot 2R$. Pole P będzie najmniejsze wtedy, gdy suma $a+b$ będzie najmniejsza. Ze wzorów (**1.17a**) i (**1.17b**) wynika, że $4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$. Wiemy, że $R^2=ab$, zatem $4R^2+(a-b)^2=(a+b)^2$. Suma $(a+b)$ będzie najmniejsza wtedy, gdy wartość wyrażenia $(a+b)^2$ będzie najmniejsza ($bo\ a+b>0$); czyli wtedy, gdy wartość wyrażenia $(a-b)^2$ będzie najmniejsza ($4R^2$ jest stałą), czyli wtedy, gdy $a=b$. Zatem trapez o najmniejszym polu jest kwadratem, $a=b=2R$.

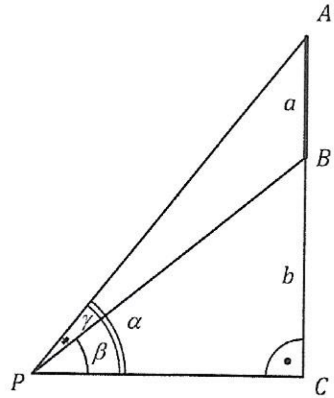
III sposób – Oznaczamy długości podstaw trapezu przez $2a$ i $2b$. Wówczas pole P trapezu możemy zapisać w postaci $P=(a+b)\cdot 2R$. Oznaczamy $a+b$ przez c. Mamy wówczas $P(c)=2R\cdot c$, gdzie $c\in\langle 2R,+\infty)$. Funkcja P jest funkcją liniową o dodatnim współczynniku kierunkowym $(2R)$, zatem jest to funkcja rosnąca. Najmniejszą wartość będzie więc przyjmować dla najmniejszego argumentu, czyli wtedy, gdy $c=2R$.

5.63. $2ab$ (11.6R)

Przez punkt $P(a,b)$ prowadzimy prostą $y-b=m(x-a)$, $m<0$ (zobacz (**8.13**)). Wyznaczamy współrzędne punktów przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych: $A(0,b-am)$, $B\left(\frac{am-b}{m},0\right)$. Niech $p(m)$ oznacza pole trójkąta AOB w zależności od m. Wówczas $p(m)=\frac{-m^2a^2+2abm-b^2}{2m}$, gdzie $m\in(-\infty,0)$; $p'(m)=\frac{-2a^2\left(m^2-\frac{b^2}{a^2}\right)}{4m^2}$, $m\in(-\infty,0)$; $p'(m)=0 \Leftrightarrow m=\frac{-b}{a}$; $p\left(\frac{-b}{a}\right)=2ab$. Ponieważ $\lim\limits_{m\to-\infty}p(m)=\lim\limits_{m\to 0^-}p(m)=+\infty$, więc $2ab$ jest wartością najmniejszą funkcji p (zobacz rozwiązanie zadania 5.52). W takim razie $m=\frac{-b}{a}$; $A(0,2b)$, $B(2a,0)$; to znaczy (**8.2**), że punkt $P(a,b)$ jest środkiem odcinka AB, c.k.d.

5.64. $\sqrt{(a+b)b}$ (11.6R, 7.4P)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Punkt P oznacza oko obserwatora; $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|\angle CPA|=\alpha$, $|\angle CPB|=\beta$, $\gamma=\alpha-\beta$. Reklamę będzie widać najlepiej z tego miejsca, w którym kąt γ będzie największy, co jest równoważne temu, że tangens tego kąta będzie największy. Korzystamy ze wzoru na tangens różnicy kątów: $\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. Ale $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a+b}{x}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{x}$, stąd



$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\frac{a+b}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{a+b}{x}\cdot\frac{b}{x}}=\frac{a}{x+\frac{(a+b)b}{x}}$. Dalej możemy postąpić na dwa sposoby:

<u>I sposób</u> – Korzystamy z rachunku pochodnych. Badamy, w jakim punkcie funkcja $f(x)=\frac{a}{x+\frac{(a+b)b}{x}}$, czyli $f(x)=\frac{ax}{x^2+(a+b)b}$, gdzie $x\in(0,+\infty)$ przyjmuje wartość największą. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. Korzystamy ze wzorów (**5.18**) i (**5.17**) do obliczenia jej pochodnej: $f'(x)=\frac{-ax^2+(a+b)ab}{\left(x^2+(a+b)b\right)^2}$, gdzie $x\in(0,+\infty)$. Następnie wyznaczamy punkt krytyczny (**5.25**): $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{(a+b)b}$.

Wówczas $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(0,\sqrt{(a+b)b}\right)$, $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{(a+b)b},+\infty\right)$. Zatem (**5.26**) funkcja f ma w punkcie $\sqrt{(a+b)b}$ maksimum lokalne. Z monotoniczności funkcji f wynika, że wyznaczone maksimum jest także wartością największą funkcji f (zobacz rozwiązanie zadania 5.52), przyjmowaną dla argumentu $x=\sqrt{(a+b)b}$.

<u>II sposób</u> – Wystarczy wyznaczyć liczbę x, $x\in(0,+\infty)$, dla której wyrażenie $x+\frac{(a+b)b}{x}$ ma wartość najmniejszą (bo funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie). Oznaczmy $(a+b)b$ przez d^2 $(d>0)$. Rozpatrujemy wyrażenie $x+\frac{d^2}{x}$. Z nierówności $(x-d)^2\geq 0$ wynika, że $x^2+d^2\geq 2xd$; skąd $x+\frac{d^2}{x}\geq 2d$ (bo $x>0$). Zatem najmniejsza wartość wyrażenia $x+\frac{d^2}{x}$ (jest równa $2d$) jest przyjmowana wtedy, gdy $x=d$, czyli $x=\sqrt{(a+b)b}$.