

Wektory - powtórzenie z 1.klasy

Musimy umieć:

- mając dwa punkty A i B , wyznaczyć wektory \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{BA} ,
- mając dany punkt A i wektor \vec{v} , wyznaczyć punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ lub $\overrightarrow{BA} = \vec{v}$,
- mając dane wektory \vec{u} i \vec{v} z parametrem, wyznaczyć parametr tak, by podane wektory były równe, przeciwne, równoległe,
- obliczyć długość danego wektora,
- obliczyć kąt między dwoma niezerowymi wektorami.

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektor $\vec{v} = [1, 2]$ to instrukcja: idź o jeden w prawo (zwiększ współrzędną x o 1) i idź o dwa do góry (zwiększ współrzędną y o 2).

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektor $\vec{v} = [1, 2]$ to instrukcja: idź o jeden w prawo (zwiększ współrzędną x o 1) i idź o dwa do góry (zwiększ współrzędną y o 2).

Wektor $\vec{u} = [3, -1]$ to instrukcja: idź o trzy w prawo (zwiększ współrzędną x o 3) i idź o jeden w dół (zmniejsz współrzędną y o 1).

Ten sposób myślenia od razu sugeruje, że wektor taki, jak $\vec{v} = [1, 2]$ nie ma jednego określonego miejsca w układzie współrzędnych.

Ten sposób myślenia od razu sugeruje, że wektor taki, jak $\vec{v} = [1, 2]$ nie ma jednego określonego miejsca w układzie współrzędnych.

Jeśli przyłożymy ten wektor do środka układu współrzędnych, to będzie on wskazywał punkt $(1, 2)$, ale jeśli przyłożymy go do punktu $(3, 5)$, to wskaże punkt $(4, 7)$.

Wektory

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego z nich do drugiego. Dla punktów A i B , wektor \overrightarrow{AB} to będzie wektor prowadzący z punktu A do punktu B . Natomiast wektor \overrightarrow{BA} to wektor prowadzący z punktu B do punktu A .

Wektory

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego z nich do drugiego. Dla punktów A i B , wektor \overrightarrow{AB} to będzie wektor prowadzący z punktu A do punktu B . Natomiast wektor \overrightarrow{BA} to wektor prowadzący z punktu B do punktu A .

Dla danych punktów $A(x_A, y_A)$ oraz $B(x_B, y_B)$, mamy następujące wektory:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

$$\overrightarrow{BA} = [x_A - x_B, y_A - y_B]$$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory \overrightarrow{AB} oraz \overrightarrow{BA}

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory \overrightarrow{AB} oraz \overrightarrow{BA}

$$\overrightarrow{AB} = [-1 - 3, 2 - 1] = [-4, 1]$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory \vec{AB} oraz \vec{BA}

$$\vec{AB} = [-1 - 3, 2 - 1] = [-4, 1]$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

$$\vec{BA} = [3 - (-1), 1 - 2] = [4, -1]$$

By dojść z punktu B do punktu A musimy iść o 4 jednostki w prawo (zwiększyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę w dół (zmniejszyć współrzędną y o 1).

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory \vec{AB} oraz \vec{BA}

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory \vec{AB} oraz \vec{BA}

Pamiętajmy, że nie musimy na siłę stosować wzorów. By dojść z A do B muszę zmniejszyć współrzędną x o 4, a współrzędną y zwiększyć o 1. To przekłada się na wektor $[-4, 1]$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory \vec{AB} oraz \vec{BA}

Pamiętajmy, że nie musimy na siłę stosować wzorów. By dojść z A do B musimy zmniejszyć współrzędną x o 4, a współrzędną y zwiększyć o 1. To przekłada się na wektor $[-4, 1]$

Analogicznie, by dojść z B do A , trzeba zwiększyć pierwszą współrzędną o 4 i zmniejszyć drugą o 1, co daje wektor $[4, -1]$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2, 3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2, 3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$x_B - 2 = 3$$

$$y_B - 3 = -1$$

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2, 3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$x_B - 2 = 3$$

$$y_B - 3 = -1$$

Otrzymujemy $x_B = 5$ oraz $y_B = 2$, czyli $B(5, 2)$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2, 3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2, 3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Prostsza interpretacja jest następująca: skoro $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, to znaczy, że wektor \vec{v} ma nas prowadzić z punktu A do punktu B . Startując z $A(2, 3)$ mamy zwiększyć współrzędną x o 3 i zmniejszyć współrzędną y o 1. Otrzymujemy $B(5, 2)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1, 5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1, -2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1, 5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1, -2]$. Znajdź punkt A taki, że $\vec{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$1 - x_A = 1$$

$$5 - y_A = -2$$

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1, 5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1, -2]$. Znajdź punkt A taki, że $\vec{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$1 - x_A = 1$$

$$5 - y_A = -2$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0, 7)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1, 5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1, -2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$1 - x_A = 1$$

$$5 - y_A = -2$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0, 7)$.

Zastanów się nad prostszą interpretacją tego zadania.

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:
równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:
równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,
przeciwnie, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,

przeciwne, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,

równoległe, gdy istnieje liczba rzeczywista p taka, że $v_x = p \times u_x$ oraz $v_y = p \times u_y$.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n , dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n , dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$2m - 3 = -n$$

$$3m = -(n - 5)$$

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n , dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$2m - 3 = -n$$

$$3m = -(n - 5)$$

Otrzymujemy $m = 2$ oraz $n = -1$.

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k , dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k , dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$2 = p \times (-4)$$

$$k = p \times 1$$

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k , dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$2 = p \times (-4)$$

$$k = p \times 1$$

Otrzymujemy $k = -\frac{1}{2}$.

Długość wektora

Długość danego wektora \vec{v} oznaczamy $|\vec{v}|$ i obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

Długość wektora

Długość danego wektora \vec{v} oznaczamy $|\vec{v}|$ i obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = [2, -1]$

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = [2, -1]$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1, -3)$ od punktu $B(2, 1)$.

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1, -3)$ od punktu $B(2, 1)$. Znajdujemy wektor

$\vec{AB} = [1, 4]$ i obliczamy jego długość

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1, -3)$ od punktu $B(2, 1)$. Znajdujemy wektor

$\vec{AB} = [1, 4]$ i obliczamy jego długość

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Oczywiście zamiast wektora \vec{AB} mogliśmy znaleźć wektor \vec{BA} i obliczyć jego długość - wynik byłby ten sam.

Kąt między wektorami

Mając dane dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ kąt α między tymi wektorami spełnia:

$$\cos \alpha = \frac{v_x u_x + v_y u_y}{|\vec{v}| |\vec{u}|} \qquad \sin \alpha = \frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|\vec{v}| |\vec{u}|}$$

Wzory te są wyprowadzone w podręczniku. Cosinus łatwo wyprowadzamy z twierdzenia cosinusów, a sinus z jedynki trygonometrycznej (gdy już mamy cosinus).

Kąt między wektorami

Mając dane dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ kąt α między tymi wektorami spełnia:

$$\cos \alpha = \frac{v_x u_x + v_y u_y}{|\vec{v}| |\vec{u}|} \qquad \sin \alpha = \frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|\vec{v}| |\vec{u}|}$$

Wzory te są wyprowadzone w podręczniku. Cosinus łatwo wyprowadzamy z twierdzenia cosinusów, a sinus z jedynki trygonometrycznej (gdy już mamy cosinus). Ważna uwaga: kąt między dwoma wektorami może mieć wartość od 0 do 180° , w związku z tym wzór na sinus nie pozwoli go nam jednoznacznie wyznaczyć (np. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ma dwa rozwiązania w przedziale $\langle 0, 180^\circ \rangle$, są to 30° oraz 150°). Lepiej zawsze policzyć ten kąt ze wzoru na cosinus.

Kąt między wektorami

Miłe konsekwencje wzorów na kąt:

Dwa wektory są prostopadłe, jeśli kąt między nimi wynosi 90° .

Wiemy, że $\cos 90^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} = 0$$

Kąt między wektorami

Miłe konsekwencje wzorów na kąt:

Dwa wektory są prostopadłe, jeśli kąt między nimi wynosi 90° .
Wiemy, że $\cos 90^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_x + v_y u_y = 0$$

Kąt między wektorami

Miłe konsekwencje wzorów na kąt:

Dwa wektory są prostopadłe, jeśli kąt między nimi wynosi 90° .
Wiemy, że $\cos 90^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_x + v_y u_y = 0$$

Mamy więc:

Dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są **prostopadłe**, jeśli

$$v_x u_x + v_y u_y = 0$$

Kąt między wektorami

Druga miła konsekwencja wzorów na kąt:

Dwa wektory są równoległe, jeśli kąt między nimi wynosi 0° lub 180° .
Wiemy, że $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|} = 0$$

Kąt między wektorami

Druga miła konsekwencja wzorów na kąt:

Dwa wektory są równoległe, jeśli kąt między nimi wynosi 0° lub 180° .
Wiemy, że $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_y - v_y u_x = 0$$

Kąt między wektorami

Druga miła konsekwencja wzorów na kąt:

Dwa wektory są równoległe, jeśli kąt między nimi wynosi 0° lub 180° .
Wiemy, że $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_y - v_y u_x = 0$$

Mamy więc:

Dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są **równoległe**, jeśli

$$v_x u_y - v_y u_x = 0$$

Wyznacznik wektorów

To wyrażenie $v_x u_y - v_y u_x$ powinno się nam wydawać znajome. Nazywamy je wyznacznikiem wektorów \vec{v} i \vec{u} .

Wyznacznik wektorów

To wyrażenie $v_x u_y - v_y u_x$ powinno się nam wydawać znajome. Nazywamy je wyznacznikiem wektorów \vec{v} i \vec{u} .

Mamy $v = [v_x, v_y]$ oraz $u = [u_x, u_y]$. Wyznacznik wektorów \vec{v} i \vec{u} oznaczamy $\det(\vec{v}, \vec{u})$ (od angielskiego determinant) i zapisujemy:

$$\det(\vec{v}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} = v_x u_y - v_y u_x$$

Bardzo proszę to wszystko dobrze przestudiować! Dodatkowo strony 186-197 z podręcznika i zrobić zadania z części "sprawdź, czy rozumiesz" ze stron 191 i 197.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.